

贵阳市 2023 年高三适应性考试（二）

理科数学参考答案

2023 年 5 月

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	B	A	C	C	A	A	B	D	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{27}$	6π	①②③

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) 由已知及正弦定理得

$$\sin A \cos C - \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin B + \sqrt{3} \sin C = 0,$$

$$\text{因为 } \sin B = \sin(A+C),$$

$$\sin C \neq 0,$$

$$\text{整理有 } \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又因为 } A \neq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{6},$$

.....6 分

(2) (方法一) 由 (1) 及余弦定理得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc \quad \text{①}$$

$$b^2 = a^2 + ac \quad \text{②}$$

联立①②得

$$c - \sqrt{3}b + a = 0$$

由正弦定理得

$$\sin C - \sqrt{3} \sin B + \frac{1}{2} = 0$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6} - B\right) - \sqrt{3} \sin B + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{整理得 } \sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{\pi}{3}$$

所以 $A+B=\frac{\pi}{2}$

即 $\triangle ABC$ 是直角三角形

(方法二)

因为 $b^2 - a^2 = ac$,

又因为 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a+c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

得 $a+c = \sqrt{3}b$,

所以 $b^2 = a^2 + ac = a(a+c)$,

得 $b = \sqrt{3}a$, 所以 $b^2 = 3a^2$, 代入 $b^2 = a^2 + ac$, 得

$2a^2 = ac$, 即 $c = 2a$,

所以 $c^2 = a^2 + b^2$,

即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

.....12 分

18. (1) 三个学习群人数比例为 $24000:24000:36000=2:2:3$

因此, 应从 A、B、C 三个学习群分别匹配 2, 2, 3 人;

.....4 分

(2) 设 X 所有可能的取值为 0, 1, 2, 3, 故

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$$

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{9}{7}.$$

.....12 分

19. 解:

(1) 连结 AC_1 , 且 $AC_1 \cap A_1C = E$, 又连结 DE ,

$\because AB \parallel$ 平面 A_1CD , $AB \subset$ 平面 ABC_1 , 且平面 $ABC_1 \cap$ 平面 $A_1CD = DE$,

$\therefore AB \parallel DE$, 又由 E 为线段 AC_1 的中点, 于是, DE 是 $\triangle C_1AB$ 的中位线,

$\therefore D$ 为线段 BC_1 的中点, 即 $\lambda = \frac{1}{2}$,

故当 $AB \parallel$ 平面 A_1CD 时, $\lambda = \frac{1}{2}$.

.....6 分

(2) 以 C 为坐标原点, 以 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标

系, 则有以下坐标 $A(4, 0, 0)$, $A_1(4, 0, 2)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 0)$, $C_1(0, 0, 2)$,

设 $D(x, y, z)$, 由 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC_1}$ 得 $(x, y - 2, z) = \lambda(0, -2, 2)$,

$$\text{解得} \begin{cases} x = 0 \\ y = -2\lambda + 2 \\ z = 2\lambda \end{cases}, \text{ 即 } D(0, -2\lambda + 2, 2\lambda),$$

所以 $\overrightarrow{A_1D} = (-4, -2\lambda + 2, 2\lambda - 2)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (-4, 0, 0)$,

令 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$ 是平面 A_1C_1D 的一个法向量, 则

$$\begin{cases} -4x + (-2\lambda + 2)y + (2\lambda - 2)z = 0 \\ -4x + 0y + 0z = 0 \end{cases},$$

令 $y = 1$ 解得 $x = 0, z = 1$, 即 $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 1)$,

同理求得平面 A_1CD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (1, \frac{4\lambda}{-2\lambda + 2}, -2)$,

由平面 $A_1CD \perp$ 平面 A_1C_1D 得 $0 \times 1 + 1 \times \frac{4\lambda}{-2\lambda + 2} - 2 = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$,

即 $D(0, 1, 1)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 2, -2)$,

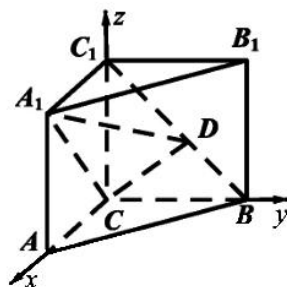
又因为 $\overrightarrow{AB} = (-4, 2, 0)$, 从而可得平面 ABB_1A_1 的一个法向量 $\mathbf{n}_3 = (1, 2, 0)$,

设平面 A_1CD 与平面 ABB_1A_1 所成二面角的大小为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3}{|\mathbf{n}_2| \cdot |\mathbf{n}_3|} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3},$$

故, 当平面 $A_1CD \perp$ 平面 A_1C_1D 时, 平面 A_1CD 与平面 ABB_1A_1 所成二面角的正弦值的为 $\frac{2}{3}$.

.....12 分



20.解: (1) $\because$ 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的离心率相等,

$\therefore a^2 = 2b^2$, 又由 $a^2 = b^2 + (\sqrt{2})^2$, $\therefore a^2 = 4, b^2 = 2$,

故, C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

.....6 分

(2) 设 $T(t, 0)$, $P(4, p)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则直线 AB 方程为 $x = my + t$, 即有 $mp = 4 - t$,

由 $\frac{PA}{PB} = \frac{AT}{TB}$, 可得 $PA \cdot TB - PB \cdot AT = 0$,

于是有, $(x_1 - 4)(x_2 - t) + (y_1 - p)(y_2 - 0) + (x_2 - 4)(x_1 - t) + (y_2 - p)(y_1 - 0) = 0$

化简得: $2x_1x_2 + 2y_1y_2 - (t+4)(x_1+x_2) - p(y_1+y_2) + 8t = 0$,

变形得: $(2m^2 + 2)y_1y_2 + (mt - 4m - p)(y_1 + y_2) = 0$ (*)

由 $\begin{cases} x = my + t \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 2)y^2 + 2mty + (t^2 - 4) = 0$

当 $\Delta = 4m^2t^2 - 4(m^2 + 2)(t^2 - 4) > 0$ 时, $\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2mt}{m^2 + 2} \\ y_1y_2 = \frac{t^2 - 4}{m^2 + 2} \end{cases}$,

将上式与 $mp = 4 - t$ 共同代入 (*), 化简得: $(t-1)(m^2 + 1) = 0$, 即 $t = 1$, 且此时 $\Delta > 0$ 成立,

故存在 x 轴上定点 $T(1, 0)$, 使得 $\frac{PA}{PB} = \frac{AT}{TB}$.

.....12 分

21.解: (1) 设切点 $M(x_0, x_0e^{2x_0})$, 则由 $f(x) = xe^{2x}$, 可得 $f'(x) = (2x+1)e^{2x}$,

$\because f'(x_0) = k_{PM}$, $\therefore (2x_0 + 1)e^{2x_0} = \frac{x_0e^{2x_0} - 0}{x_0 - t}$, 化简得: $2x_0^2 - 2tx_0 - t = 0$,

依题意 $\Delta = 4t^2 + 8t = 0$, 解得 $t = 0$ 或 $t = -2$,

故, $t = 0$ 或 $t = -2$ 时, 过点 P 作曲线 $f(x) = xe^{2x}$ 的切线有且仅有一条.

.....6 分

(2) 解法一:

依题意, 由 $x \in (0, +\infty)$, 所以, $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow a \leq e^{2x} - \frac{\ln x + 1}{x}$

理科数学第4页 (共6页)

设 $h(x) = e^{2x} - \frac{\ln x + 1}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{2x^2 e^{2x} + \ln x}{x^2}$,

设 $m(x) = 2x^2 e^{2x} + \ln x$, 易知 $m'(x) = (4x^2 + 4x)e^{2x} + \frac{1}{x} > 0$, 即 $m(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递增,

且 $x \rightarrow 0$ 时, $m(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $m(x) \rightarrow +\infty$,

$\therefore$ 令 $m(x) = 2x^2 e^{2x} + \ln x = 0$, 则该方程有唯一解 x_0 ,

使得在 $x \in (0, x_0)$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 在 $x \in (x_0, +\infty)$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

即 $x = x_0$ 是函数 $h(x)$ 极小值点, 且有 $2x_0^2 e^{2x_0} + \ln x_0 = 0$,

上式变形得: $2x_0 e^{2x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} \Rightarrow 2x_0 \cdot e^{2x_0} = \ln \frac{1}{x_0} \cdot e^{\ln \frac{1}{x_0}} \Rightarrow f(2x_0) = f(\ln \frac{1}{x_0})$, (*)

由 (1) 可知 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递增,

则 (*) 可得 $2x_0 = \ln \frac{1}{x_0}$, 即有 $e^{2x_0} = \frac{1}{x_0}$ 与 $\ln x_0 = -2x_0$

$\therefore h(x) \geq h(x_0) = e^{2x_0} - \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{-2x_0 + 1}{x_0} = 2$, 即 $a \leq 2$,

故, 综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

解法二:

由 $x \in (0, +\infty)$, 以及切线不等式: $e^x \geq x + 1$, ($x = 0$ 时取等号)

$\therefore f(x) = xe^{2x} = e^{\ln x} \cdot e^{2x} = e^{\ln x + 2x} \geq \ln x + 2x + 1$

$\therefore$ 当 $a \leq 2$ 时, $f(x) \geq \ln x + 2x + 1 \geq \ln x + ax + 1 = g(x)$, 即此时, $f(x) \geq g(x)$ 成立

又当 $a > 2$ 时, 存在 $x_0 > 0$ 满足 $\ln x_0 = -2x_0$, 即 $x_0 e^{2x_0} = 1$,

此时, $f(x) - g(x) = x_0 e^{2x_0} - ax_0 - \ln x_0 - 1 = (2 - a)x_0 < 0$, 不合题意.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

.....12 分

22. (1) 由 C_1 的参数方程得

$$\begin{cases} x^2 = t^2 + \frac{64}{t^2} + 16 \\ y^2 = t^2 + \frac{64}{t^2} - 16 \end{cases}$$

所以 $x^2 - y^2 = 32$

故 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta = 32$

理科数学第5页 (共6页)

.....5 分

$$(2) \quad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} \\ \rho^2 \cos 2\theta = 32 \end{cases} \Rightarrow \rho_A = 8, \quad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} \\ \rho = 2\sqrt{3} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \rho_B = 3$$

$$\therefore |AB| = |\rho_A - \rho_B| = 5$$

又 $\because$ 点 $P(4, 0)$ 到射线的距离为 2

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |AB| = 5$$

.....10 分

23. (1) 由柯西不等式得

$$[a^2 + (2b)^2 + (2c)^2] \cdot (1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + 2b + 2c)^2$$

$$\therefore (a + 2b + 2c)^2 \leq 81$$

$$\therefore a + 2b + 2c \leq 9$$

当且仅当 $a = 2b = 2c$ 时取等号

$$\text{即 } a = 3, b = \frac{3}{2}, c = \frac{3}{2} \text{ 时取等号}$$

$$\therefore a + 2b + 2c \leq 9$$

.....5 分

$$(2) \because b = c, a > 0, b > 0, c > 0$$

由 (1) $a + 4b \leq 9$ 得

$$\frac{1}{a + 4b} \geq \frac{1}{9}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + 4b) = 5 + \frac{4b}{a} + \frac{a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9$$

当且仅当 $a = 2b$ 时, 即 $a = 3, b = \frac{3}{2}$ 时取等号,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a + 4b} \times 9$$

$$\text{即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$$

.....10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线