高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由 $(1+i)^2z=3+4i$，得 $z=\frac{3+4i}{(1+i)^2}=\frac{3+4i}{2i}=\frac{(3+4i)\times(-i)}{2}=\frac{4-3i}{2}=2-\frac{3}{2}i$，所以 $\bar{z}=2+\frac{3}{2}i$，在复平面内其所对应的点为 $\left(2,\frac{3}{2}\right)$，位于第一象限. 故选 A.

2. D　由题意知 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1<x<10\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{x\in\mathbf{Z}\mid 1\leqslant x\leqslant 8\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，所以 $A\cap B=\{1,2,4,5,7,8\}$，$\{0,3,6,9\}=\complement_U(A\cap B)$. 故选 D.

3. B　因为 α 的终边与圆 $x^2+y^2=9$ 相交于点 $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},t\right)$，所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$. 故选 B.

4. C　由题意知所卷成的无底圆锥母线长为 6，设该无底圆锥的底面半径为 r，高为 h，则 $2\pi r=6\pi$，所以 $r=3$，所以 $h=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$，所以 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\pi$. 故选 C.

5. A　由题意得 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_9$ 中 1 的个数为 6，因为 $a_0=1$，所以 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 中 1 的个数为 5，所以满足 $f(n)=6$ 的 n 的个数为 $C_9^5=\frac{9\times8\times7\times6\times5}{5\times4\times3\times2\times1}=126$. 故选 A.

6. D　由题意知 [illegible]，所以 $\left(\frac{50}{15}\right)^\lambda=\frac{30}{7.5}=4$，两边取以 10 为底的对数，得 $\lambda\lg\frac{10}{3}=2\lg 2$，所以 $\lambda=\frac{2\lg 2}{1-\lg 3}\approx\frac{2\times0.301}{1-0.477}\approx1.15$. 故选 D.

7. A　由题意知 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，故 l 的方程为 $x=\frac{1}{2}y+\frac{p}{2}$，与 C 的方程联立，得 $y^2-py-p^2=0$，显然 $\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=p$，$y_1y_2=-p^2$，所以 $x_1+x_2=\frac{1}{2}(y_1+y_2)+p=\frac{3p}{2}$，$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$，又 $|AF|=\frac{p}{2}+x_1$，$|BF|=\frac{p}{2}+x_2$，所以 $|AF|\cdot|BF|=\left(\frac{p}{2}+x_1\right)\left(\frac{p}{2}+x_2\right)=\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+x_1x_2=\frac{5p^2}{4}=20$，所以 $p=4$. 故选 A.

8. D　因为 $\forall x_1,x_2\in D$，$f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}=-\frac{f(x_2)f(x_1)+1}{f(x_1)-f(x_2)}=-f(x_2-x_1)$，所以 $f(x)$ 为 D 上的奇函数，因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$，所以 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1$，所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)f\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1}{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}=0$，$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{f(x)f\left(\frac{\pi}{2}\right)+1}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(x)}=-\frac{1}{f(x)}$，所以 $f(x-\pi)=f\left(x-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=f(x)$，所以 π 是 $f(x)$ 的一个周期，$\forall x_1,x_2\in D$，且 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$，则 $0<x_2-x_1<\frac{\pi}{2}$，因为当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_2-x_1)$ 均小于 0，又 $f(x_2-x_1)=\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_1)-f(x_2)}$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，故 ABC 正确，D 错误. 故选 D.

9. AD　甲城市的气温分别为 5 ℃，3 ℃，6 ℃，3 ℃，7 ℃，5 ℃，6 ℃；乙城市的气温分别为 5 ℃，4 ℃，6 ℃，5 ℃，5 ℃，4 ℃，6 ℃. 对于 A，甲城市气温的中位数为 5 ℃；平均数为 $\frac{5+3+6+3+7+5+6}{7}=5$ ℃，故 A 正确；对于 B，根据折线图知乙城市的日均气温更稳定，故 B 错误；对于 C，乙城市日均气温的极差为 2 ℃，故 C 错误；对于 D，乙城市日均气温众数为 5 ℃，故 D 正确. 故选 AD.

10. ABD　因为 $f(x+\pi)=\sqrt{1+\sin(x+\pi)}+\sqrt{1-\sin(x+\pi)}=\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\sin x}=f(x)$，所以 π 为 $f(x)$ 的一个周期，故 A 正确；因为 $f(\pi-x)=\sqrt{1+\sin(\pi-x)}+\sqrt{1-\sin(\pi-x)}=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故 B 正确；因为当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}$，故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，故 C 错误；因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的取值范围为 $[\sqrt{2},2]$，因为 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的取值范围为 $[\sqrt{2},2]$，又 $f(x)$ 的周期为 π，所以 $f(x)$ 在整个定义域上的值域为 $[\sqrt{2},2]$，故 D 正确. 故选 ABD.

11. ABC　因为 $a,c,a+c$ 成等比数列，所以 $c^2=ac+a^2$，所以 $b^2=ac$ 且 $e^2-e-1=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（负根舍），又 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，所以 $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{ac}{a^2}=\frac{c}{a}=e$，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{e}$，即 E 的一条渐近线的斜率为 $\sqrt{e}$，故 A 正确；不妨设 F 为左焦点，B 为虚轴的上端点，则 A 为右顶点，则 BF 的斜率 $k_{BF}=\frac{b}{c}$，AB 的斜率 $k_{AB}=-\frac{b}{a}$，所以 $k_{BF}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{ac}=-1$，所以 $AB\perp BF$，故 B 正确；设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减并整理得 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{b^2}{a^2}$，即 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{b^2}{a^2}$，所以 $k_{PQ}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{ac}{a^2}=\frac{c}{a}=e$，故 C 正确；设直线 OP：$y=kx$，则直线 OQ：$y=-\frac{1}{k}x$，将 $y=kx$ 代入双曲线方程 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，得 $x^2=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2k^2}$，则 $y^2=\frac{a^2b^2k^2}{b^2-a^2k^2}$，$\therefore |OP|^2=x^2+y^2=\frac{a^2b^2(k^2+1)}{b^2-a^2k^2}$，将 k 换成 $-\frac{1}{k}$ 得 $|OQ|^2=\frac{a^2b^2(k^2+1)}{b^2k^2-a^2}$，则 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{(b^2-a^2)(k^2+1)}{a^2b^2(k^2+1)}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2b^2}$ 与 b 的值有关，故 D 错误. 故选 ABC.

12. AC　对于 A，令 $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$ 且 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则 $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $f(a)>f(b)$，即 $\frac{e^a}{a+1}>\frac{e^b}{b+1}$，所以 $e^a(b+1)>e^b(a+1)$，即 $be^a-e^b>ae^b-e^a$，故 A 正确；对于 B，令 $f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}-2x$ 且 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则 $f'(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2>2\sqrt{e^x\cdot\frac{1}{e^x}}-2=0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $f(a)>f(b)$，即 $e^b-\frac{1}{e^b}-2b<e^a-\frac{1}{e^a}-2a$，所以 $e^b+\frac{1}{e^a}+2a<e^a+\frac{1}{e^b}+2b$，故 B 错误；对于 C，令 $f(x)=\frac{\sin x-1}{x}$ 且 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x+1}{x^2}>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $f(a)>f(b)$，即 $\frac{\sin a-1}{a}>\frac{\sin b-1}{b}$，所以 $b(\sin a-1)>a(\sin b-1)$，则 $a\sin b+b<b\sin a+a$，故 C 正确；对于 D，当 $b=\frac{\pi}{6}$，$a=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin b\cos a=\frac{1}{4}<\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 D 错误. 故选 AC.

13. $\frac{\pi}{3}$　因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，所以 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=7$，因为 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，所以 $|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

14. 2　原点到 l 的距离 $d_1=\frac{|-2|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=2$，$C$ 到 l 的距离为 4，故满足条件的 l 既与圆 $x^2+y^2=4$ 相切，又与圆 C 相切，故 l 是圆 $x^2+y^2=4$ 和圆 C 的公切线，易知两圆相交，故公切线的条数为 2，即符合条件的直线 l 有 2 条.

15. $7+\frac{1}{e^2}$　由题意得 $f'(x)=a^x\ln a+3$，所以 $f'(0)=\ln a+3$，因为切线与直线 $x+2y-1=0$ 垂直，所以切线斜率为 2，即 $\ln a+3=2$，解得 $a=e^{-1}$，所以 $f(x)=e^{-x}+3x+1$，且 $f'(x)=-e^{-x}+3$，显然 $f'(x)$ 是增函数，当 $x\in[-1,2]$时，$f'(x)\geqslant f'(-1)=3-e>0$，所以 $f(x)$ 在$[-1,2]$上单调递增，故 $f(x)_{max}=f(2)=7+\frac{1}{e^2}$.

16. $a_n=\sqrt{n-1}$（2 分）　$1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$（3 分）　因为对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n^2+a_{n+2}^2=2a_{n+1}^2$，所以 $\{a_n^2\}$ 成等差数列，又 $a_2=1$，$a_5=2$，所以 $\{a_n^2\}$ 的公差 $d=\frac{a_5^2-a_2^2}{3}=\frac{4-1}{3}=1$，所以 $a_n^2=a_2^2+(n-2)d=1+n-2=n-1$，又 $a_n\geqslant0$，所以 $a_n=\sqrt{n-1}$，所以

$$b_n=\frac{2}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$=\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，所以 $S_n=\left(\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$.

17. (1)解：由 $(2n-1)a_{n+1}=(2n+1)a_n$ 及 $a_1=1$，得 $a_n\neq0$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n-1}$，…………………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，有 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_4}{a_3}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_2}{a_1}\times a_1$

$=\frac{2n-1}{2n-3}\times\frac{2n-3}{2n-5}\times\cdots\times\frac{7}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}\times1=2n-1$. …………………………… 3 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1=2\times1-1$，符合上式，所以 $a_n=2n-1$. …………………………………… 4 分

(2)证明：由(1)得 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\frac{1}{2^{2n-1}}$，所以 $a_nb_n=\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$，…………………………… 5 分

所以 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^5}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$，

所以 $\frac{1}{2^2}S_n=\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^5}+\frac{5}{2^7}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{2n+1}}$，…………………………………… 6 分

两式相减，得

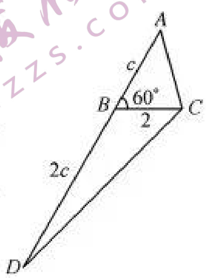
$\frac{3}{4}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^5}+\cdots+\frac{2}{2^{2n-1}}-\frac{2n-1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{2}{2^3}\left(1-\frac{1}{2^{2n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2^2}}-\frac{2n-1}{2^{2n+1}}$ …………………………… 8 分

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{6n+5}{3\times2^{2n+1}}=\frac{5}{6}-\frac{6n+5}{3\times2^{2n+1}}$，

所以 $S_n=\frac{10}{9}-\frac{6n+5}{9\times 2^{2n-1}}$. ………………………………………………………… 9 分

因为 $\frac{6n+5}{3\times 2^{2n-1}}>0$,所以 $S_n<\frac{10}{9}$. ………………………………………………………… 10 分

18. 解:(1)因为 $a^2\cos B+ab\cos A-c^2=a^2-b^2$,所以 $a^2\cos B+ab\cos A=a^2+c^2-b^2$,



所以 $a(a\cos B+b\cos A)=2ac\cos B$, ……………………………………………… 2 分

所以 $a\cos B+b\cos A=2c\cos B$,所以 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos B$,

所以 $\sin(A+B)=2\sin C\cos B$,即 $\sin C=2\sin C\cos B$, ……………………………… 4 分

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C\neq 0$,所以 $\cos B=\frac{1}{2}$, ……………………………… 5 分

来源:高三答案公众号

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………… 6 分

(2)在△ABC 中,$AC^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4+c^2-2c$;

在△BCD 中,$CD^2=a^2+(2c)^2-2a\cdot 2c\cdot\cos\angle DBC=4+4c^2+4c$, ………………………… 8 分

所以 $\frac{CD^2}{AC^2}=\frac{4c^2+4+4c}{c^2+4-2c}=\frac{4(c^2-2c+4)+12c-12}{c^2-2c+4}=4+\frac{12(c-1)}{(c-1)^2+3}$. ………………………… 9 分

因为 $c>1$,所以 $c-1>0$,所以 $\frac{12(c-1)}{(c-1)^2+3}=\frac{12}{(c-1)+\frac{3}{c-1}}\leqslant\frac{12}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$, ………………………… 11 分

当且仅当 $c-1=\frac{3}{c-1}$,即 $c=\sqrt{3}+1$ 时等号成立.

故当 $\frac{CD}{AC}$ 取得最大值时,$c=\sqrt{3}+1$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)2×2 列联表补充完整如下:

	好评	差评	合计
男性	120	80	200
女性	90	110	200
合计	210	190	400

………………………………………………………………………………………………… 2 分

零假设为 H_0:对该影片的评价与性别无关.

根据列联表中数据,经计算得 $\chi^2=\frac{400\times(120\times 110-90\times 80)^2}{210\times 190\times 200\times 200}\approx 9.023>7.879=x_{0.005}$,

根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验,推断 H_0 不成立,即认为对该影片的评价与性别有关,此推断犯错误的概率不大于 0.005. ………………………………………………………… 4 分

(2)从抽取的 400 人中所有给出"好评"的观众中随机抽取 1 人为女性的概率 $P=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$,且各次抽取之间相互独立,

故 $X\sim B\left(3,\frac{3}{7}\right)$, ………………………………………………………… 5 分

所以 $P(X=0)=C_3^0\times\left(\frac{3}{7}\right)^0\times\left(\frac{4}{7}\right)^3=\frac{64}{343}$,$P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{3}{7}\right)^1\times\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{144}{343}$, ………………… 7 分

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{3}{7}\right)^2\times\left(\frac{4}{7}\right)^1=\frac{108}{343}$,$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{3}{7}\right)^3\times\left(\frac{4}{7}\right)^0=\frac{27}{343}$, ………………… 9 分

故 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{343}$	$\frac{144}{343}$	$\frac{108}{343}$	$\frac{27}{343}$

…………………………………………………………………………………………………… 10分

所以 $E(X)=0\times\frac{64}{343}+1\times\frac{144}{343}+2\times\frac{108}{343}+3\times\frac{27}{343}=\frac{9}{7}$. ………………………………… 12分

或 $E(X)=3\times\frac{3}{7}=\frac{9}{7}$. …………………………………………………………………… 12分

20.（1）证明：由题意知 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp BC$. ………………………… 1分

过 D 在平面 D_1BD 内作直线 $DG\perp D_1B$ 交 D_1B 于点 G，…………………………………………… 2分

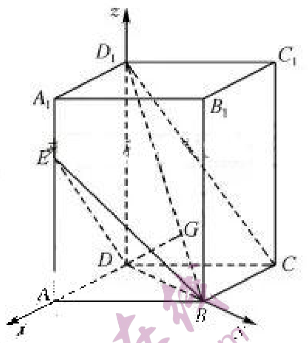
因为平面 $D_1BC\perp$ 平面 D_1BD，平面 $D_1BC\cap$ 平面 $D_1BD=D_1B$，$DG\subset$ 平面 D_1BD，

所以 $DG\perp$ 平面 D_1BC. ……………………………………………………………………………… 3分

又 $BC\subset$ 平面 D_1BC，所以 $DG\perp BC$. ……………………………………………………………… 4分

因为 $D_1D\cap DG=D$，D_1D，$DG\subset$ 平面 D_1BD，所以 $BC\perp$ 平面 D_1BD，……………………………… 5分

又 $BD\subset$ 平面 D_1BD，所以 $BC\perp BD$. ……………………………………………………………… 6分



（2）解：由（1）知 $BC\perp BD$，因为 $DA/\!/BC$，所以 $AD\perp DB$，又 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，且 DA，$DB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp DA$，$DD_1\perp DB$，故以 D 为坐标原点，直线 DA，DB，DD_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，设 $AE=\lambda\ (0<\lambda\leqslant 4)$，则 $E(2,0,\lambda)$，$B(0,2,0)$，故 $\overrightarrow{DE}=(2,0,\lambda)$，$\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$. ……………………… 8分

设平面 BDE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ 2x+\lambda z=0.\end{cases}$

令 $z=2$，则 $y=0$，$x=-\lambda$，所以 $\boldsymbol{n}=(-\lambda,0,2)$，……………………………………… 9分

显然平面 BDD_1 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $\lambda=2\sqrt{3}$（负根舍），……………………………… 11分

所以在棱 AA_1 存在点 E，使得二面角 $E-BD-D_1$ 的大小为 30°，且 $\frac{AE}{AA_1}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………… 12分

21. 解：（1）因为 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $b^2=\frac{1}{3}a^2$，……………………………… 2分

所以 $\frac{|NF|}{|MN|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{1}{3}a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………… 4分

（2）由题意知直线 l 的斜率存在且不为0，设其方程为 $y=kx+t\ (k\neq 0)$，

由（1）知 C 的方程为 $\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，…………………………………………………………… 5分

联立 $\begin{cases}y=kx+t,\\ \frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2+6ktx+3t^2-3b^2=0$，……………………………………… 6分

由题意知 $\Delta=36k^2t^2-4(3k^2+1)(3t^2-3b^2)=0$，

所以 $t^2=b^2(3k^2+1)$. ① ……………………………………………………………………………… 7分

设 $A(x_0,y_0)$，则 $x_0=-\frac{3kt}{3k^2+1}$，$y_0=kx_0+t=\frac{t}{3k^2+1}$. ………………………………………… 8 分

因为 $|OA|=|OB|$，所以 $\left(-\frac{3kt}{3k^2+1}\right)^2+\left(\frac{t}{3k^2+1}\right)^2=t^2$，化简得 $k^2=\frac{1}{3}$. ② ………………………… 9 分

又△OAB 的面积为 $\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}\times\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}\times\sqrt{1+k^2}\left|-\frac{3kt}{3k^2+1}-0\right|=\sqrt{3}$. ③ ………………………… 10 分

由①②③得 $t^2=4$，$b^2=2$，从而 $a^2=6$，

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………………………… 12 分

22. (1) 证明：因为 $f(x)=\ln x+ax\cos x-a\sin x$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+a\cos x-ax\sin x-a\cos x=\frac{1}{x}-ax\sin x$，…………………………………………… 1 分

因为 $x\in(0,\pi]$，所以 $\sin x\geqslant0$，又 $a\leqslant0$，所以 $f'(x)>0$，………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上单调递增. ……………………………………………………………………………… 3 分

(2) 解：当 $a=1$ 时，$\ln x+x\cos x-\frac{kx}{e^x}\geqslant f(x)$，

即 $\ln x+x\cos x-\frac{kx}{e^x}\geqslant\ln x+x\cos x-\sin x$，

所以 $\frac{kx}{e^x}\leqslant\sin x$，即 $e^x\sin x-kx\geqslant0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立. …………………………………………… 4 分

令 $g(x)=e^x\sin x-kx$，则 $g'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-k$，

令 $h(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-k$，

则 $h'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-e^x\sin x=2e^x\cos x$，…………………………………………… 5 分

因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos x\geqslant0$，所以 $h'(x)\geqslant0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $h(x)>h(0)=1-k$. ……………………………………… 6 分

①当 $1-k\geqslant0$，即 $k\leqslant1$ 时，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以对 $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，$g(x)>g(0)=0$，即 $g(x)>0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，符合题意；……………………………… 7 分

②当 $1-k<0$，即 $k>1$ 时，$h(0)<0$，

又 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-k$，若 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-k\leqslant0$，则在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$h(x)\leqslant0$，即 $g'(x)\leqslant0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以 $g(x)<g(0)=0$，不合题意；…………………………………………………………………… 9 分

若 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-k>0$，则存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $h(x_0)=0$，

所以在 $(0,x_0)$ 上，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，

所以在 $(0,x_0)$ 上，$g(x)$ 单调递减，所以对 $x\in(0,x_0)$，$g(x)<g(0)=0$ 不合题意. ………………………… 11 分

综上所述，关于 x 的不等式 $\ln x+x\cos x-\frac{kx}{e^x}\geqslant f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，实数 k 的取值范围为 $(-\infty,1]$. … 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。