九江市2023年第三次高考模拟统一考试

数学试题（理科）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分.全卷满分150分，考试时间120分钟.

考生注意：

1.答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名等内容填写在答题卡上.

2.第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，第Ⅱ卷用黑色签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效.

第Ⅰ卷（选择题60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合$M=\{x\mid x>\frac{1}{2}\}$，$N=\{x\mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$，则$(\complement_{\mathbf{R}}M)\cap N=$（ A ）

A. $\{x\mid 0\le x\le\frac{1}{2}\}$　　B. $\{x\mid 0<x<\frac{1}{2}\}$　　C. $\{x\mid x\le\frac{1}{2}\}$　　D. $\{x\mid x\le 0\}$

解：$\because \complement_{\mathbf{R}}M=\{x\mid x\le\frac{1}{2}\}$，$N=\{x\mid 0\le x\le 2\}$，$\therefore (\complement_{\mathbf{R}}M)\cap N=\{x\mid 0\le x\le\frac{1}{2}\}$，故选A.

2.已知复数z满足$z\cdot(2+\mathrm{i})=\bar{z}-4\mathrm{i}$，则$|z|=$（ B ）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

解:设$z=a+b\mathrm{i}$（$a,b\in\mathbf{R}$），则$(a+b\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=a-b\mathrm{i}-4\mathrm{i}$，即$(2a-b)+(a+2b)\mathrm{i}=a-(b+4)\mathrm{i}$，

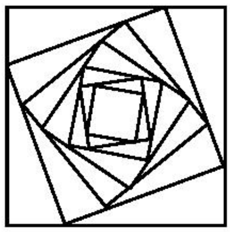
$\therefore\begin{cases}2a-b=a\\a+2b=-b-4\end{cases}$，解得$a=b=-1$，$\therefore z=-1-\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{2}$.故选B.

3.抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$的焦点坐标为（ D ）

A. $(\frac{1}{8},0)$　　B. $(0,\frac{1}{8})$　　C. $(\frac{1}{2},0)$　　D. $(0,\frac{1}{2})$

解：由$y=\frac{1}{2}x^2$得$x^2=2y$，$\therefore$抛物线的焦点坐标为$(0,\frac{1}{2})$，故选D.

4.分形的数学之美，是以简单的基本图形，凝聚扩散，重复累加，以迭代的方式而形成的美丽的图案.自然界中存在着许多令人震撼的天然分形图案，如鹦鹉螺的壳、蕨类植物的叶子、孔雀的羽毛、菠萝等.如图所示，为正方形经过多次自相似迭代形成的分形图形，且相邻的两个正方形的对应边所成的角为15°.若从外往里最大的正方形边长为9，则第5个正方形的边长为（ C ）



A. $\frac{81}{4}$　　B. $\frac{81\sqrt{6}}{8}$

C. 4　　D. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

解：设第 n 个正方形的边长为 a_n，则由已知可得 $a_n=a_{n+1}\sin15^\circ+a_{n+1}\cos15^\circ$，

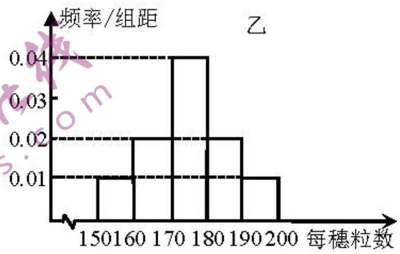
$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{\sin15^\circ+\cos15^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin60^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore \{a_n\}$ 是以 9 为首项，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 为公比的等比数列，

$\therefore a_5=a_1q^4=9\times(\dfrac{\sqrt{6}}{3})^4=4$，故选 C.

5. 为了强化节约意识，更好地开展“光盘行动”，某校组织甲乙两个社会实践小组分别对某块稻田的稻穗进行调研，甲乙两个小组各自随机抽取了 20 株稻穗，并统计了每株稻穗的粒数，整理得到如下统计表（频率分布直方图中同一组中的数据用该组区间的中点值为代表），则下列结论正确的是(C)

甲

15	8
16	3 3 6
17	1 1 2 3 3 4 4 5 6 8 8 8
18	3 7 8
19	9



A. 甲组中位数大于乙组中位数，甲组平均数大于乙组平均数
B. 甲组中位数大于乙组中位数，甲组平均数等于乙组平均数
C. 甲组中位数小于乙组中位数，甲组平均数等于乙组平均数
D. 甲组中位数小于乙组中位数，甲组平均数小于乙组平均数

解：甲组中位数为174，平均数为

$174+\dfrac{1}{20}(-16-11-11-8-3-3-2-1-1+0+0+1+2+4+4+4+9+13+14+25)=175$，

乙组中位数为175，平均数为 $0.1\times(155+195)+0.2\times(165+185)+0.4\times175=175$，

故选 C.

6. 已知 $a=2^{0.2}$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=\log_{0.2}0.4$，则（ A ）

A. $b>a>c$　　B. $b>c>a$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

解：$\because 1<a=2^{0.2}<2$，$b=\log_{0.5}0.2>\log_{0.5}0.25=2$，$c=\log_{0.2}0.4<\log_{0.2}0.2=1$，$\therefore b>a>c$. 故选 A.

7. 已知 $0<\alpha<\beta<\pi$，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $\cos\beta=$（ D ）

A. $\dfrac{8}{9}$　　B. $\dfrac{7}{9}$　　C. $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$　　D. 0

解法一：$\because 0<\alpha<\pi$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，又 $-\pi<\alpha-\beta<0$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

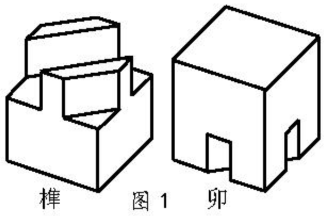
$\therefore \sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{3}$，$\therefore \cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times(-\dfrac{1}{3})=0$，故选 D.

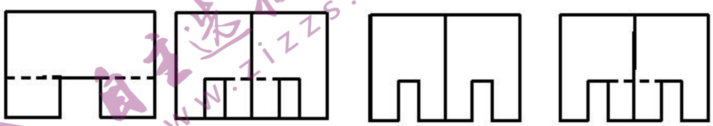
解法二：$\because 0<\alpha<\pi$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha$，即 $\cos(\beta-\alpha)=\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)$，

$\because 0<\beta-\alpha<\pi$，$0<\dfrac{\pi}{2}-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \beta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$\beta=\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\beta=0$，故选 D.

8. 榫卯是一种中国传统建筑、家具的主要结构方式，它凝聚了中华文明的智慧. 它利用材料本身特点自然连接，既符合力学原理，又重视实用和美观，达到了实用性和功能性的完美统一. 右图是榫卯结构中的一种，当其合并在一起后，可形成一个正四棱柱. 将合并后的榫卯对应拿开（如图 1 所示），已知榫的俯视图如图 2 所示，则卯的主视图为（ C ）



榫　图 1　卯



A　B　C　D

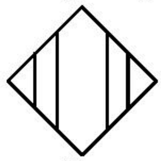
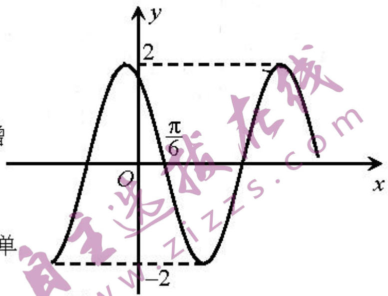


图 2

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图像如图所示，记 $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$，则下列说法正确的是（ C ）

A. $g(x)$ 的最小正周期为 2π　　B. $\varphi=-\dfrac{5\pi}{6}$

C. $g(\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{6})$ 上单调递增



解：$\because f'(x)=\omega\cos(\omega x+\varphi)$，由 $\omega>0$ 并结合图像知 $\omega=2$，

$\therefore f'(x)=2\cos(2x+\varphi)$，又 $f'(\dfrac{\pi}{6})=2\cos(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=0$，且在 $(0,\dfrac{\pi}{6})$ 上单调递减，$\therefore \dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\pi$，$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore g(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})=\sin(4x+\dfrac{\pi}{3})$，$\therefore T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，$g(\dfrac{\pi}{4})=\sin(\dfrac{4\pi}{3})=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

10. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，$f(x+1)$ 是奇函数，$f(x-1)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，则 $f(x)$（ C ）

A. 在 $[2020,2022]$ 上单调递减　　B. 在 $[2021,2023]$ 上单调递增

C. 在 $[2022,2024]$ 上单调递减　　D. 在 $[2023,2025]$ 上单调递增

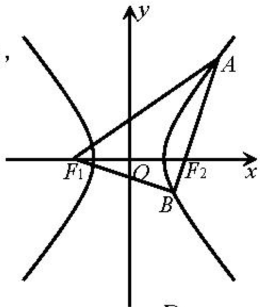
解：$\because f(x+1)$ 是奇函数，$\therefore f(x+1)=-f(-x+1)$，即 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称，又 $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，$\therefore f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，即 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增. 由 $f(x+1)=-f(-x+1)$ 可得 $f(2-x)=-f(x)$，由 $f(x-1)$ 图像关于直线 $x=1$ 对称可知 $f(x)$ 为偶函数，

$\therefore f(2-x)=f(x-2)=-f(x)$，$\therefore f(x+4)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是周期函数，最小正周期为 4，$\therefore f(x)$ 在

$[2022,2024]$ 上单调递减，故选 C.

11. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 的直线交双曲线右支于 A,B 两点，若 $AB\perp F_1B$，$\sin\angle F_1AB=\dfrac{3}{5}$，则该双曲线的离心率为（ C ）

A. $\sqrt{10}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

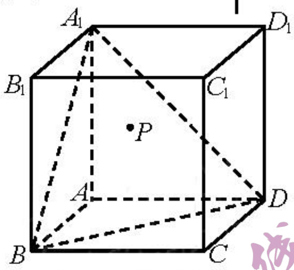


解：如图，设 $|BF_1|=3t$，$\because AB\perp F_1B$，$\sin\angle F_1AB=\dfrac{3}{5}$，$\therefore |AF_1|=5t$，$|AB|=4t$，

由双曲线定义可知 $|AF_2|=|AF_1|-2a=5t-2a$，

$|BF_2|=|BF_1|-2a=3t-2a$，$\therefore 8t-4a=4t$，$\therefore t=a$，$\therefore |BF_1|=3a$，$|BF_2|=a$，

$\because \angle ABF_1=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore 2c=|F_1F_2|=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，故选 C.

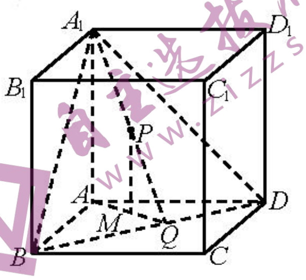


12. 如图，棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 $\triangle A_1BD$ 内一点（包括边界），且线段 PA_1 的长度等于点 P 到平面 $ABCD$ 的距离，则线段 PA_1 长度的最小值是（ D ）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

C. $2-\sqrt{2}$　　D. $3-\sqrt{6}$

解:设直线 A_1P 与 BD 交于点 Q，连接 AQ，过点 P 作 AA_1 的平行线交 AQ 于点 M，显然 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，故 $PA_1=PM$. 设 $PA_1=PM=x$，则 $PQ=A_1Q-x$，



由 $PM\,//\,AA_1$，知 $\dfrac{PM}{AA_1}=\dfrac{PQ}{A_1Q}$. 即 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{A_1Q-x}{A_1Q}$，解得 $x=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{A_1Q}}$，

由图可知 $A_1B\sin 60^\circ\leqslant A_1Q\leqslant A_1B$，即 $A_1Q\in[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}]$，

$\therefore x=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{A_1Q}}\in[3-\sqrt{6},2-\sqrt{2}]$，故选 D.

第 II 卷（非选择题 90 分）

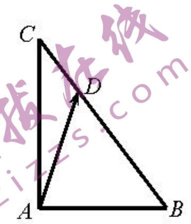
本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22-23 题为选考题，学生根据要求作答.

二、填空题:本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式中，x^2 的系数为__15__.

解：$(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(x^2)^{6-r}(-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^r=C_6^r(-1)^r x^{12-\frac{5}{2}r}$，令 $12-\dfrac{5}{2}r=2$，解得 $r=4$，

$\therefore$展开式中x^2的系数为$C_6^4(-1)^4=15$.



14. Rt△ABC中，$A=90°$，$AB=2$，D为BC上一点，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\underline{\frac{4}{3}}$.

解：如图，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle DAB=|\overrightarrow{AB}|\times\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{4}{3}$.

15. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=2^n$，则$S_9=\underline{341}$.

解：$S_9=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+(a_6+a_7)+(a_8+a_9)=1+2^2+2^4+2^6+2^8=\frac{1-2^{10}}{1-4}=341$.

16. 已知函数$f(x)=e^x-ax^2$（$a\in\mathbf{R}$）有两个极值点x_1,x_2，且$x_1>2x_2$，则a的取值范围为$\underline{(\frac{1}{\ln 2},+\infty)}$.

解：$\because f'(x)=e^x-2ax$，$\therefore x_1,x_2$是$f'(x)$的两个零点，即是方程$e^x-2ax=0$的两个不相等的实数根，

$\because x_1,x_2\neq 0$，$\therefore x_1,x_2$是方程$2a=\frac{e^x}{x}$的两个不相等的实数根.

令$g(x)=\frac{e^x}{x}$，则$g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$. 当$x<0$或$0<x<1$时，$g'(x)<0$；当$x>1$时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$在$(-\infty,0)$和$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，且当$x<0$时，$g(x)<0$；当$x>0$时，$g(x)>0$.

$\therefore 2a>g(1)=e$，且$x_1,x_2>0$. 令$t=\frac{x_1}{x_2}$，由$x_1>2x_2$，得$t>2$，又$\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{e^{x_2}}{x_2}$，即$\frac{e^{tx_2}}{tx_2}=\frac{e^{x_2}}{x_2}$，$\therefore e^{tx_2}=te^{x_2}$，

可得$x_2=\frac{\ln t}{t-1}$.

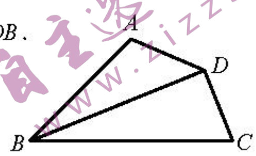
令$h(t)=\frac{\ln t}{t-1}(t>2)$，$\therefore h'(t)=\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}$，令$\varphi(t)=1-\frac{1}{t}-\ln t$，$\therefore\varphi'(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=\frac{1-t}{t^2}<0$，$\therefore\varphi(t)$在$(2,+\infty)$上单调递减，$\therefore\varphi(t)<\varphi(2)<0$，$\therefore h'(t)<0$，即$h(t)$在$(2,+\infty)$上单调递减，$\therefore h(t)<h(2)=\ln 2$，$\therefore x_2<\ln 2$，

又$\because 2a=\frac{e^{x_2}}{x_2}$，且$g(x)=\frac{e^x}{x}$在$(0,1)$上单调递减，$\therefore 2a>\frac{2}{\ln 2}$，即$a>\frac{1}{\ln 2}$，$\therefore a$的取值范围为$(\frac{1}{\ln 2},+\infty)$.

三、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分12分）

如图，圆内接四边形$ABCD$中，已知$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$\angle CDB=2\angle ADB$.

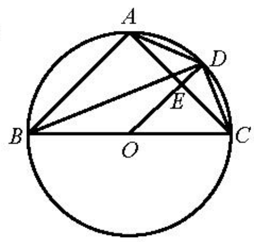


(1) 求$\angle ABC$；

(2) 求四边形$ABCD$面积的最大值.

解：(1) 设四边形$ABCD$外接圆的半径为R，$\angle ADB=\theta$，则$\angle CDB=2\theta$，

且$0<3\theta<\pi$，$\therefore 0<\theta<\frac{\pi}{3}$.



如图，在△ABD和△BCD中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\theta}=2R=\frac{BC}{\sin 2\theta}$ ·········1分

即$\frac{2}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 2\theta}$ ·········2分

$\therefore\sin 2\theta=\sqrt{2}\sin\theta$，$\therefore 2\sin\theta\cos\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ ·········3分

$\because\sin\theta\neq 0$，$\therefore\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ·········4分

$\because\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$ ·········5分

$\because \angle ADC=3\theta=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore \angle ABC=\pi-\angle ADC=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$………6 分

(2) 连接 AC，由(1)知 $\angle CDB=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \angle BAC=\angle CDB=\frac{\pi}{2}$………7 分

又 $\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$………8 分

解法一：取 BC 的中点 O，AC 的中点 E，连接 OE，则 $OE//AB$，$\therefore OE\perp AC$………9 分

当点 D 在 OE 的延长线上时，$DE=OD-OE=\sqrt{2}-1$………10 分

此时 $\triangle ADC$ 面积最大，最大值为 $\frac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1$………11 分

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $2+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1$………12 分

解法二：在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC$，

即 $4=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\frac{3\pi}{4}$，即 $4=AD^2+CD^2+\sqrt{2}AD\cdot CD$………9 分

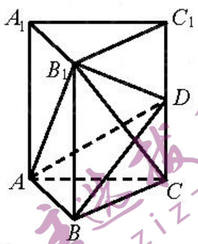
$\therefore 4\ge 2AD\cdot CD+\sqrt{2}AD\cdot CD$，即 $AD\cdot CD\le 4-2\sqrt{2}$，当且仅当 $AD=CD$ 时取等号………10 分

$\therefore S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot CD\sin\frac{3\pi}{4}\le\frac{\sqrt{2}}{4}(4-2\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$………11 分

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $2+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1$………12 分

18.（本小题满分 12 分）

直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，D 为 CC_1 的中点，$BB_1=\sqrt{2}BC$．



(1) 求证：平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABD；

(2) 若 $AB=BD$，求二面角 $B-AD-B_1$ 的余弦值．

解：(1) $\because ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，$\therefore AB\perp BB_1$，

又 $\because AB\perp BC$，$BC\cap BB_1=B$，$\therefore AB\perp$ 平面 BB_1C_1C………1 分

$\because B_1C\subset$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore B_1C\perp AB$ ①………2 分

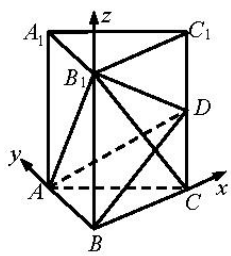
设 $BC=t$，则 $BB_1=\sqrt{2}t$，$\tan\angle BB_1C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$CD=\frac{1}{2}CC_1=\frac{\sqrt{2}t}{2}$，$\tan\angle CBD=\frac{CD}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle BB_1C=\angle CBD$………3 分

$\because \angle BB_1C+\angle B_1CB=90^\circ$，$\therefore \angle CBD+\angle B_1CB=90^\circ$，故 $B_1C\perp BD$ ②………4 分

由①②，且 $AB\cap BD=B$，知 $B_1C\perp$ 平面 ABD………5 分

又 $\because B_1C\subset$ 平面 AB_1C，$\therefore$ 平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABD………6 分



(2) 不妨设 $BC=1$，则 $AB=BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

如图所示，建立空间直角坐标系 $B-xyz$，则 $C(1,0,0)$，$A(0,\frac{\sqrt{6}}{2},0)$，$D(1,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，

$B_1(0,0,\sqrt{2})$………7 分

由（1）知 $B_1C\perp$ 平面 ABD，且 $\overrightarrow{B_1C}=(1,0,-\sqrt{2})$，则 $\boldsymbol{m}=(1,0,-\sqrt{2})$ 为平面 ABD 的一个法向量………8 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ADB_1 的法向量，$\overrightarrow{AD}=(1,-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,-\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2})$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{\sqrt{6}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\\ -\frac{\sqrt{6}}{2}y+\sqrt{2}z=0\end{cases}$，令 $y=2$，得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$z=\sqrt{3}$，$\therefore \boldsymbol{n}=(\frac{\sqrt{6}}{2},2,\sqrt{3})$………10 分

$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{34}}{2}}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$………11 分

由图可知二面角 $B-AD-B_1$ 为锐二面角，故其余弦值为 $\frac{\sqrt{17}}{17}$………12 分

19.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且三点 $(1,2)$，$(2,1)$，$(-1,-2)$ 中恰有一点在 E 上，记为点 P．

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 设 A,B 是 E 上异于点 P 的两点，直线 PA,PB 分别交 x 轴于 M,N 两点，且 $\angle PMN=\angle PNM$，求直线 AB 的斜率.

解：(1) 由椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{2}$，$\therefore a=2b$………1 分

由 E 的对称性，知 $P(2,1)$ 在 E 上………2 分

$\therefore \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$………3 分

解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$………4 分

(2) 由已知可得直线 PA 斜率存在且不为 0，设直线 PA 的方程为 $y=k(x-2)+1$（$k\neq 0$）………5 分

联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-2)+1\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，消去 y 整理得 $(1+4k^2)x^2-(16k^2-8k)x+16k^2-16k-4=0$………6 分

由 $\Delta=(16k^2-8k)^2-4(1+4k^2)(16k^2-16k-4)>0$，得 $k\neq-\frac{1}{2}$………7 分

且 $2x_A=\frac{16k^2-16k-4}{1+4k^2}$，即 $x_A=\frac{8k^2-8k-2}{1+4k^2}$………8 分

代入 $y=k(x-2)+1$ 得， $y_A=\dfrac{-4k^2-4k+1}{1+4k^2}$ ， $\therefore A(\dfrac{8k^2-8k-2}{1+4k^2},\dfrac{-4k^2-4k+1}{1+4k^2})$ ·········9 分

$\because \angle PMN=\angle PNM$ ， $\therefore$ 直线 PB 的斜率为 $-k$ ·········10 分

用 $-k$ 代替点 A 坐标中的 k 得到点 B 的坐标为 $B(\dfrac{8k^2+8k-2}{1+4k^2},\dfrac{-4k^2+4k+1}{1+4k^2})$ ·········11 分

$\therefore k_{AB}=\dfrac{\dfrac{-4k^2+4k+1}{1+4k^2}-\dfrac{-4k^2-4k+1}{1+4k^2}}{\dfrac{8k^2+8k-2}{1+4k^2}-\dfrac{8k^2-8k-2}{1+4k^2}}=\dfrac{8k}{16k}=\dfrac{1}{2}$， $\therefore$ 直线 AB 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$ ·········12 分

20.（本小题满分 12 分）

人勤春来早，实干正当时.某工厂春节后复工复产，为满足市场需求加紧生产，但由于生产设备超负荷运转导致某批产品次品率偏高.已知这批产品的质量指标 $X\sim N(80,\sigma^2)$ ，当 $X\in(60,100)$ 时产品为正品，其余为次品.生产该产品的成本为 20 元/件，售价为 40 元/件.若售出次品，则不更换，需按原售价退款并补偿客户 10 元/件.

(1) 若某客户买到的 10 件产品中恰有两件次品，现从中任取三件，求被选中的正品数量 ξ 的分布列和数学期望；

(2) 已知 $P(X\le 60)=0.02$，工厂欲聘请一名临时质检员检测这批产品，质检员工资是按件计费，每件 x 元.产品检测后，检测为次品便立即销毁，检测为正品方能销售.假设该工厂生产的这批产品都能销售完，工厂对这批产品有两种检测方案，方案一：全部检测；方案二：抽样检测.若要使工厂两种检测方案的盈利均高于不检测时的盈利，求 x 的取值范围，并从工厂盈利的角度选择恰当的方案.

解：(1) 由题意可知 $\xi=1,2,3$，

$P(\xi=1)=\dfrac{C_2^2\cdot C_8^1}{C_{10}^3}=\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{15}$ ·········1 分

$P(\xi=2)=\dfrac{C_2^1\cdot C_8^2}{C_{10}^3}=\dfrac{56}{120}=\dfrac{7}{15}$ ·········2 分

$P(\xi=3)=\dfrac{C_2^0\cdot C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{56}{120}=\dfrac{7}{15}$ ·········3 分

$\therefore \xi$ 的分布列如下：

ξ	1	2	3
P	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{7}{15}$

·········4 分

$\therefore E(\xi)=1\times\dfrac{1}{15}+2\times\dfrac{7}{15}+3\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{12}{5}$ ·········5 分

(2) $\because X \sim N(80,\sigma^2)$ 且 $P(X \le 60)=0.02$，$\therefore P(X \ge 100)=0.02$.

$\therefore$ 这批产品的次品率为 $p=0.04$………6 分

设该工厂生产的这批产品有 n 件，记 Y 为这批产品的次品数量，则 $Y \sim B(n,0.04)$，$E(Y)=0.04n$
………7 分

若这批产品不检测，则该工厂的利润的期望为 $y_1=n\times(40-20)-0.04n\times 50=18n$ ………8 分

若选择方案一，

则该工厂的利润的期望为 $y_2=0.96n\times(40-20)-nx-0.04n\times 20=18.4n-nx$ ………9 分

令 $y_2>y_1$，解得 $0<x<0.4$………10 分

若选择方案二，

假设抽样检测 $m(m<n)$ 件，则检测出的次品的期望为 $0.04m$ 件，不检测的产品有 $(n-m)$ 件，

则该工厂的利润的期望为 $y_3=18.4m-mx+18(n-m)=(0.4-x)m+18n$.

令 $y_3>y_1$，解得 $0<x<0.4$………11 分

则 $y_3-y_2=(n-m)(x-0.4)$，$\because 0<x<0.4$，且 $m<n$，$\therefore y_3<y_2$.

$\therefore x\in(0,0.4)$，并从工厂盈利的角度应选择方案一…………12 分

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{ax-1}$（$a\in\mathbf{R}$）.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $a=-2$ 时，若 $x\ge 0$，$f(x)\le \ln(1+2x)-mx-1$，求实数 m 的取值范围.

解：(1) $f'(x)=\dfrac{e^{2x}[2ax-(a+2)]}{(ax-1)^2}$………1 分

当 $a=0$ 时，$f(x)=-e^{2x}$，易知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减………2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，可得 $x>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2}$；令 $f'(x)<0$，可得 $x<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2}$ 且 $x\ne\dfrac{1}{a}$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{a})$ 和 $(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增………3 分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，可得 $x<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2}$ 且 $x\ne\dfrac{1}{a}$；令 $f'(x)<0$，可得 $x>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2}$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{a})$ 和 $(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递减………4 分

(2) 当 $a=-2$ 时，由 $f(x)\le\ln(1+2x)-mx-1$，得 $-\dfrac{e^{2x}}{2x+1}\le\ln(1+2x)-mx-1$，

即 $\dfrac{e^{2x}}{2x+1}+\ln(1+2x)-mx-1\ge 0$ ·········5 分

令 $g(x)=\dfrac{e^{2x}}{2x+1}+\ln(1+2x)-mx-1$（$x\ge 0$），则 $g'(x)=\dfrac{4xe^{2x}}{(2x+1)^2}+\dfrac{2}{1+2x}-m$，

$\because g(x)\ge 0$，且 $g(0)=0$，$\therefore$ 存在 $x_0>0$，使得当 $x\in[0,x_0)$ 时，$g'(x)\ge 0$ ·········6 分

$\therefore g'(0)=2-m\ge 0$，即 $m\le 2$ ·········7 分

下面证明当 $m\le 2$ 时，$g(x)\ge 0$ ·········8 分

$\because g(x)\ge \dfrac{e^{2x}}{2x+1}+\ln(1+2x)-2x-1$，且 $\dfrac{e^{2x}}{2x+1}=e^{2x-\ln(1+2x)}$，

$\therefore g(x)\ge e^{2x-\ln(1+2x)}+\ln(1+2x)-2x-1$ ·········9 分

设 $F(x)=e^x-x-1$，$\therefore F'(x)=e^x-1$，可知 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore F(x)\ge F(0)=0$，$\therefore e^x\ge x+1$，$\therefore e^{2x-\ln(1+2x)}\ge 2x-\ln(1+2x)+1$ ·········10 分

$\therefore g(x)\ge e^{2x-\ln(1+2x)}+\ln(1+2x)-2x-1\ge 2x-\ln(1+2x)+1+\ln(1+2x)-2x-1=0$ ·········11 分

综上，实数 m 的取值范围为 $(-\infty,2]$ ·········12 分

请考生在第 22-23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2t^2\\ y=2t\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\alpha-\theta)=\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})$，其中 α 为倾斜角，且 $\alpha\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3})$.

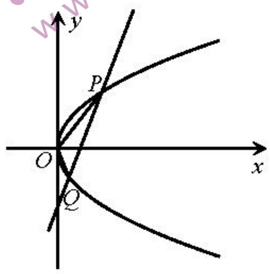
(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

(2) 设 l 与曲线 C 相交于 P,Q 两点，直线 OP,OQ 的斜率为 k_1,k_2，求 k_1+k_2 的取值范围.

解：(1) 曲线 C 的普通方程为 $y^2=2x$ ·········2 分

由 $\rho\sin(\alpha-\theta)=\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})$，得 $\rho\sin\alpha\cos\theta-\rho\cos\alpha\sin\theta=\sin\alpha-\cos\alpha$，

即 $x\sin\alpha-y\cos\alpha=\sin\alpha-\cos\alpha$，即 $y=k(x-1)+1$（$k\in(1,\sqrt{3})$）·········4 分



(2) 设 $P(2t_1^2,2t_1)$，$Q(2t_2^2,2t_2)$，

将 $\begin{cases}x=2t^2\\ y=2t\end{cases}$ 代入直线 l 方程中，得 $2kt^2-2t+1-k=0$ ·········5 分

则 $t_1+t_2=\dfrac{1}{k}$，$t_1t_2=\dfrac{1-k}{2k}$ ·········7 分

$\therefore k_1+k_2=\dfrac{2t_1}{2t_1^2}+\dfrac{2t_2}{2t_2^2}=\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\dfrac{2}{1-k}$ ·········8 分

$\because k\in(1,\sqrt{3})$，$\therefore k_1+k_2\in(-\infty,-\sqrt{3}-1)$ ·········10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

设 a,b,c 均为正数，已知函数 $f(x)=|x-a|+|x+b|+c$ 的最小值为 4.

(1) 求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值；

(2) 证明：$\dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}\geq 8$.

解：(1) $\because f(x)=|x-a|+|x+b|+c\geq|(x-a)-(x+b)|+c=|a+b|+c=a+b+c$ ………1 分

$\because f_{\min}(x)=4$，$\therefore a+b+c=4$ ………2 分

$\because a^2+b^2\geq 2ab$，$a^2+c^2\geq 2ac$，$b^2+c^2\geq 2bc$，$\therefore 2(a^2+b^2+c^2)\geq 2ab+2bc+2ac$ ………3 分

$\therefore 3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2=16$ ………4 分

即 $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{16}{3}$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号，故 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值为 $\dfrac{16}{3}$ ………5 分

(2) $\because \dfrac{a^2+b^2}{c}\geq\dfrac{2ab}{c}$，$\dfrac{b^2+c^2}{a}\geq\dfrac{2bc}{a}$，$\dfrac{c^2+a^2}{b}\geq\dfrac{2ac}{b}$ ………6 分

$\therefore \dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}\geq\dfrac{2ab}{c}+\dfrac{2bc}{a}+\dfrac{2ac}{b}$ ………7 分

又 $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}=b(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a})\geq 2b\sqrt{\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{c}{a}}=2b$，同理 $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{ac}{b}\geq 2a$，$\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}\geq 2c$ ………8 分

$\therefore \dfrac{2ab}{c}+\dfrac{2bc}{a}+\dfrac{2ac}{b}\geq 2(a+b+c)=8$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立………9 分

即 $\dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}\geq 8$ ………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。