

德阳三中高 2020 级高三上期第四次综合性考试 数学（理科）

满分: 150 分 时间: 120 分钟

一、单项选择题（本题共 12 道小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）。

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} | x(x-2) \leq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A. $\{-1, 0, 1\}$

B. $\{0, 1\}$

C. $\{-2, -1, 0, 1\}$

D. $\{-2, -1, 0\}$

【答案】B

【解析】

【分析】可以求出集合 N , 然后进行交集的运算即可.

【详解】 $\because M = \{-2, -1, 0, 1\}$, $N = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$,

$\therefore M \cap N = \{0, 1\}$.

故选: B.

2. 已知 $(2+xi)i = 1+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位), 则 $x+yi$ 在复平面内对应的点在 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】根据复数的乘法运算及复数相等求出 x, y 即可得解.

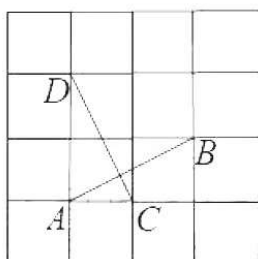
【详解】由 $(2+xi)i = 1+yi$ 可得 $-x+2i = 1+yi$,

所以 $x = -1, y = 2$,

则 $x+yi = -1+2i$, 故复平面内对应的点在第二象限,

故选: B

3. 如图所示的图形中, 每一个小正方形的边长均为 1, 则 $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CD} =$ ()



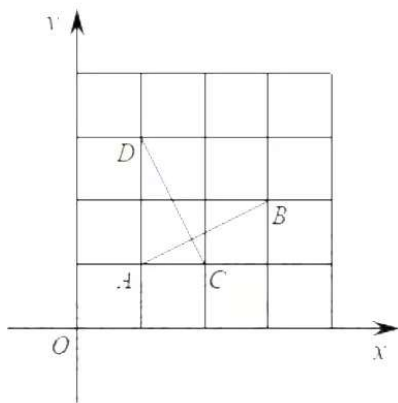
- A. 0 B. 1 C. -2 D. -1

【答案】D

【解析】

【分析】由题可得 $\overrightarrow{AC} = (1, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, 2)$, 即求.

【详解】由题把图形看作平面直角坐标系的一部分则 $\overrightarrow{AC} = (1, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, 2)$,



$$\therefore (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CD} = (3, 1) \cdot (-1, 2) = -3 + 2 = -1.$$

故选: D.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - 1$, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 511 B. 512 C. 1023 D. 1024

【答案】B

【解析】

【分析】根据 a_n 与 S_n 的关系可得出数列为等比数列, 根据通项公式求解即可.

【详解】由题可知: $S_n = 2a_n - 1$,

①当 $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 1$, 解得: $a_1 = 1$

②当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 1$, 则

$$a_{n-1} = S_{n-1} - S_n \Rightarrow a_{n-1} = 2a_{n+1} - 2a_n \Rightarrow a_{n-1} = 2a_n,$$

当 $n=2$ 时, $a_1 + a_2 = 2a_2 - 1$, 解得 $a_2 = 2$,

所以 $a_2 = 2a_1$,

即 $a_{n-1} = 2a_n$ 对 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列,

故 $a_n = 2^{n-1}$, 当 $n=10$ 时, $a_{10} = 2^{10-1} = 2^9 = 512$.

故选: B.

5. 下列直线中能成为曲线 $y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$ 的对称轴的是 ()

A. $x = \frac{5\pi}{12}$

B. $x = \frac{7\pi}{12}$

C. $x = \frac{\pi}{6}$

D. $x = \frac{\pi}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】由三角恒等变换化简后, 根据正弦型三角函数的对称轴求解即可.

【详解】 $\because y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$,

$\therefore$ 令 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 解得对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$.

选项中只有当 $k=0$ 时, $x = \frac{5\pi}{12}$ 符合题意.

故选: A.

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 0 \\ \log_2(mx+4), & x > 0 \end{cases}$, 且 $f(2) = 3$, 则 $f(-m) =$ ()

A. $-\frac{3}{4}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 1

D. $-\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用分段函数给定 x 的取值范围代入值求出参数的值及函数的解析式, 再将值代入函数解析式即可解得.

【详解】因为当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_2(mx+4)$

所以当 $x=2$ 时, $f(2) = \log_2(2m+4) = 3$,

所以 $2m+4=8$, 即 $m=2$,

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2^x - 1$,

所以 $f(-2) = 2^{-2} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$, 即 $f(-m) = f(-2) = -\frac{3}{4}$.

故选: A

7. 由表中三个样本点通过最小二乘法计算得到变量 x 、 y 之间的线性回归方程为: $\hat{y} = 2x + k$, 且当 $x=10$

时, y 的预报值 $\hat{y} = 23$, 则 $2m-n = (\quad)$

x	12	m	13
y	27	25	n

A. 6

B. -6

C. 7

D. -7

【答案】D

【解析】

【分析】由题可得 $k=3$, 利用线性回归方程过样本中心可得 $\frac{52+n}{3} = 2 \times \frac{25+m}{3} + 3$, 即得.

【详解】由题可得 $23 = 2 \times 10 + k$,

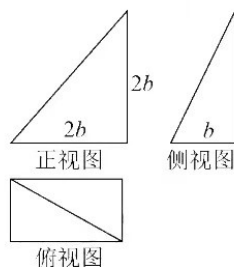
$$\therefore k=3, \hat{y}=2x+3, \text{ 又 } \bar{x} = \frac{25+m}{3}, \bar{y} = \frac{52+n}{3},$$

$$\therefore \frac{52+n}{3} = 2 \times \frac{25+m}{3} + 3,$$

$$\therefore 2m-n=-7.$$

故选: D.

8. 如图所示三视图表示的几何体的外接球表面积为 36π , 则该几何体的体积为 $(\quad)$



A. $\frac{4}{3}$

B. 36

C. $\frac{32}{3}$

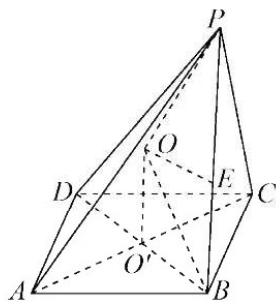
D. $\frac{9}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据三视图还原出几何体，由外接球的面积得球半径，据此求出 b ，即可得出棱锥体积.

【详解】由三视图可知，几何体为一条侧棱 PB 垂直底面矩形的四棱锥 $P-ABCD$ ，如图，



其中 $PB = AB = 2b$, $BC = b$,

由外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 36\pi$, 可得外接球半径 $R = 3$,

设外接球球心为 O , 底面矩形的外接圆圆心为 O' ,

则 $OO' \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $OO' \parallel PB$,

过 O 作 $OE \perp PB$ 于 E , 则由 $OB = OP = R$ 知 E 为 PB 中点,

由四边形 $O'OFB$ 为矩形知, $O'O = EB = \frac{1}{2}PB = b$,

在 $Rt\triangle OO'B$ 中, $OB^2 = O'B^2 + OO'^2$, 即 $R^2 = \left(\frac{\sqrt{(2b)^2 + b^2}}{2}\right)^2 + b^2 = 9$,

解得 $b = 2$,

所以 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{矩形}ABCD} \cdot PB = \frac{1}{3} \times 2 \times 4 \times 4 = \frac{32}{3}$.

故选: C

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $0 < A < \frac{\pi}{2}$, 且 $\tan A + \tan\left(A - \frac{\pi}{4}\right) = 2$, 则 $\frac{\pi}{4} < B < \frac{\pi}{2}$ 是“ $\triangle ABC$ 为锐角三角形”的

()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由已知先求 $\tan A$, 可得 A , 然后可解.

【详解】因为 $\tan A + \tan\left(A - \frac{\pi}{4}\right) = \tan A + \frac{\tan A - 1}{1 + \tan A} = 2$ ，解得 $\tan^2 A = 3, 0 < A < \frac{\pi}{2}$, $\tan A = \sqrt{3}$ ，即

$$A = \frac{\pi}{3},$$

所以 $B + C = \frac{2\pi}{3}$ ，若 $\frac{\pi}{4} < B < \frac{\pi}{2}$ ，则 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{5\pi}{12}$ ，此时， $\triangle ABC$ 为锐角三角形；

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，取 $C = \frac{7\pi}{15}$ ，则 $B = \frac{\pi}{5}$ ，故“ $\frac{\pi}{4} < B < \frac{\pi}{2}$ ”是“ $\triangle ABC$ 为锐角三角形”的充分不必要条件。

故选：A

10. 已知实数 $a, b > 0$ ，且函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2(a+b)x + 2(a+b) - 1}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，则 $\frac{a}{2b} + \frac{2}{a}$ 的最小值是（ ）

A. 4

B. 6

C. $2\sqrt{2}$

D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】由一元二次不等式在 $\mathbb{R}$ 上恒成立解得 $a+b$ 的值，再对所求的式子进行等量代换、分离常数、“1”的代换、基本不等式可求得结果。

【详解】 $\because f(x) = \sqrt{x^2 - 2(a+b)x + 2(a+b) - 1}$ 定义域为 $\mathbb{R}$ ，

$\therefore x^2 - 2(a+b)x + 2(a+b) - 1 \geq 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立，

$\therefore \Delta = [-2(a+b)]^2 - 4 \times [2(a+b) - 1] \leq 0$ ，即： $(a+b)^2 - 2(a+b) + 1 \leq 0$

$\therefore (a+b-1)^2 \leq 0$ ，解得： $a+b=1$

又 $\because a > 0, b > 0$

$$\therefore \frac{a}{2b} + \frac{2}{a} = \frac{1-b}{2b} + \frac{2}{a} = \frac{1}{2b} + \frac{2}{a} - \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2b} + \frac{2}{a}\right)(a+b) - \frac{1}{2} = \frac{a}{2b} + \frac{2b}{a} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{a}{2b} \cdot \frac{2b}{a}} + 2 = 4$$

当且仅当 $\frac{a}{2b} = \frac{2b}{a}$ ，即 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ 时取等号。

故选：A.

11. 已知 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心， $AB = 4$ ， $AC = 6$ ， M 为边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC} =$ （ ）

A. 20

B. 10

C. -20

D. -10

【答案】B

【解析】

【分析】利用平面向量的线性运算， $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ， $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}$ ，而 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ，代入计算即可.

【详解】由题意 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ， $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}$ ， $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ，

$$\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(6^2 - 4^2) = 10.$$

故选：B.

【点睛】本题考查平面向量的数量积，解题关键是利用向量加减法法则得到 $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}$ ，由 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ，这样 $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ ，这两个向量都可以用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示，这就与已知条件建立了联系.

12. 已知曲线 $f(x) = \sin \omega x + m \cos \omega x$ ， $(m \in \mathbb{R})$ 相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，且函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最大值，则下列命题正确的个数为（ ）

①当 $x_0 \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时， m 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$ ；②将 $f(x)$ 的图象向左平移 $4|x_0|$ 个单位后所对应的函数为偶函数；③函数 $y = f(x) + |f(x)|$ 的最小正周期为 π ；④函数 $y = f(x) + |f(x)|$ 在区间 $\left(x_0, x_0 + \frac{\pi}{3}\right)$

上有且仅有一个零点.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】

根据函数 $f(x)$ 相邻的对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，求得函数的最小正周期，从而求得 ω 的值，再利用辅助角公式，求得函数的解析式，逐项分析，即可求解.

【详解】函数 $f(x)$ 的相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，则周期为 $T = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$ ，

由 $|\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，所以 $\omega = \pm 2$

当 $\omega = 2$ 时, 则 $f(x) = \sin 2x + m \cos 2x = \sqrt{m^2 + 1} \sin(2x + \varphi)$,

对于①: 由函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最大值, $2x_0 + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x_0, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $m = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - 2x_0\right) = \frac{1}{\tan 2x_0}$,

又由 $x_0 \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$, 所以 $\frac{1}{\tan 2x_0} \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$, 即 $m = \frac{1}{\tan 2x_0} \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$, 所以①正确;

对于②: 不妨令 $m = \sqrt{3}$, 则 $f(x) = \sin 2x + m \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 可解的一个 $x_0 = \frac{\pi}{12}$, 那么 $f(x)$

的图象向左平移 $4|x_0|$ 个单位后所对应的函数为 $f(x) = 2 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = -\sin 2x$, 此时 $f(x)$ 是奇

函数, 故②不正确;

对于③: $y = f(x)$ 的最小正周期是 π , $y = |f(x)|$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$, 但 $y = f(x) + |f(x)|$ 的最小正周期是 π , 故③正确;

对于④: $y = f(x) + |f(x)| = \begin{cases} 2\sqrt{1+m^2} \sin(2x+\varphi), \sin(2x+\varphi) \geq 0 \\ 0, \sin(2x+\varphi) < 0 \end{cases}$, 由③可知最小正周期为 T , 由函

数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最大值, 在其后 $\frac{1}{4}T$ 上满足 $\sin(2x+\varphi) \geq 0$, 当

$x \in \left[x_0 + \frac{\pi}{4}, x_0 + \frac{3\pi}{4}\right]$ 时, $\sin(2x+\varphi) \leq 0$, $y = f(x) + |f(x)| = 0$, 因此在区间 $\left(x_0, x_0 + \frac{\pi}{3}\right)$ 上有无数个

零点, 故④不正确;

所以正确的命题有 2 个.

故选: B

【点睛】解题的关键在于利用辅助角公式将 $f(x)$ 化成“一名一角” $y = \sqrt{1+m^2} \sin(\omega x + \varphi)$, 再利用对称轴之间的距离等于半个周期, 求出 ω 的值, 判断三角函数的性质要借助于正弦函数的图象, 属于难题.

二、填空题(本题共 4 道小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知平面向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, 则 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角等于_____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$ ## 60°

【解析】

【分析】由题可得 $\vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$, $|\vec{c}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = 1$, 再利用夹角公式即得.

【详解】 $\because$ 平面向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ ， $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ ，

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 - \vec{b} \cdot \vec{a} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1,$$

$$\therefore \cos \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}| |\vec{a}|} = \frac{1}{2},$$

所以 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角等于 $\frac{\pi}{3}$.

故答案为： $\frac{\pi}{3}$.

14. 已知递增等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足： $a_1=1$ ， $\frac{a_4+a_5}{a_2+a_3}=4$ ，则 $\frac{S_1+S_4}{a_4}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】

【分析】利用已知条件求出公比 q ，再求出 S_1, S_4, a_4 后可得结论.

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 公比为 q ，则 $\frac{a_4+a_5}{a_2+a_3} = \frac{a_1(1+q)}{a_1(1+q)} = q^2 = 4$ ，又数列 $\{a_n\}$ 是递增的， $\therefore q=2$ ，

$$\therefore S_4 = \frac{1-2^4}{1-2} = 15, \quad S_1 = a_1 = 1, \quad a_4 = 2^3 = 8, \quad \frac{S_1+S_4}{a_4} = \frac{1+15}{8} = 2.$$

故答案为：2.

【点睛】本题考查等比数列的通项公式和前 n 项和公式，属于基础题.

15. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的离心率互为倒数，则椭圆的焦点到

双曲线的渐近线的距离是_____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据椭圆方程求出焦点坐标、离心率，得到双曲线的离心率，求出双曲线渐近线，由点到直线距离求解.

【详解】由 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 知椭圆中 $a'=4, b'=2\sqrt{3}$ ，

所以 $c' = \sqrt{16-12} = 2$ ，即椭圆的焦点为 $(\pm 2, 0)$ ，

$$\text{所以 } e' = \frac{c'}{a'} = \frac{1}{2},$$

$$\text{由题意知双曲线的离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{e'} = 2,$$

$$\text{所以 } \frac{b^2}{a^2} = 3, \text{ 故双曲线的渐近线方程为 } y = \pm\sqrt{3}x,$$

$$\text{不妨取椭圆左焦点 } (-2, 0), \text{ 则由点到直线距离可得 } d = \frac{|(\pm\sqrt{3}) \times (-2) - 0|}{\sqrt{1+3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

同理, 椭圆右焦点到渐近线的距离也是 $\sqrt{3}$,

所以椭圆焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$,

故答案为: $\sqrt{3}$

$$16. \text{ 已知函数 } f(x) = \begin{cases} m \ln x, & x > m \\ (2 - \frac{m}{e})x, & x \leq m \end{cases} \quad (e = 2.71828 \dots), \text{ 若对定义域内不相等的 } x_1, x_2, \text{ 都有}$$

$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $[e, 2e)$

【解析】

【分析】由条件知函数单调递增, 根据分段函数为增函数建立不等式组求解, 求解过程需构造函数利用单调性求解.

【详解】由 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$,

可得 $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0$, 即函数在定义域内单调递增,

$$\therefore \begin{cases} m > 0 \\ 2 - \frac{m}{e} > 0 \\ m \ln m \geq m \left(2 - \frac{m}{e}\right) \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 0 < m < 2e \\ \ln m + \frac{m}{e} - 2 \geq 0 \end{cases},$$

又 $g(m) = \ln m + \frac{m}{e} - 2$ 单调递增, 且 $g(e) = \ln e + \frac{e}{e} - 2 = 0$,

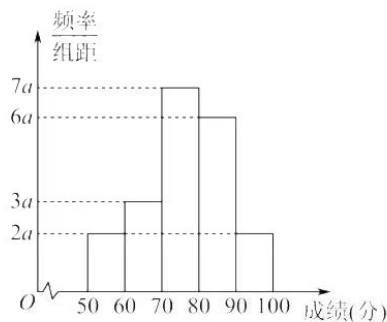
$\therefore$ 由 $g(m) = \ln m + \frac{m}{e} - 2 \geq 0 = g(e)$, 得 $m \geq e$,

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $[e, 2e)$.

故答案为: $[c, 2c)$.

三、解答题 (本题共 6 道小题, 共 70 分, 写出必要的文字说明与演算步骤)

17. 垃圾分类是改善环境, 节约资源的新举措. 住建部于 6 月 28 日拟定了包括我市在内的 46 个重点试点城市, 要求这些城市在 2020 年底基本建成垃圾分类处理系统. 为此, 我市某中学对学生开展了“垃圾分类”有关知识的讲座并进行测试, 将所得测试成绩整理后, 绘制出频率分布直方图如图所示.



(1) 求频率分布直方图中 a 的值, 并估计测试的平均成绩;

(2) 将频率视为相应的概率, 如果从参加测试的同学中随机选取 4 名同学, 这 4 名同学中测试成绩在 $[60, 80)$

的人数记为 ξ , 求 ξ 的分布列及数学期望.

【答案】(1) $a = 0.005$, 76.5; (2) 分布列见解析, 2.

【解析】

【分析】(1) 利用频率分布直方图中所有频率之和为 1 (即所有小矩形面积之和为 1) 可计算出 a , 每组中间点值乘以该组频率相加可得估计的平均成绩;

(2) 由 (1) 得成绩在 $[60, 80)$ 的频率为 $\frac{1}{2}$, 因此有 $\xi \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$, ξ 的可能取值为: 0, 1, 2, 3, 4, 由

二项分布计算出各概率得分布列, 由期望公式可计算出期望值.

【详解】(1) 由题意得: $(2a + 3a + 7a + 6a + 2a) \times 10 = 1$

所以: $a = 0.005$

平均成绩为: $55 \times 0.1 + 65 \times 0.15 + 75 \times 0.35 + 85 \times 0.3 + 95 \times 0.1 = 76.5$.

(2) 易知测试成绩在 $[60, 80)$ 的频率为 $\frac{1}{2}$

故 $\xi \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

ξ 的可能取值为: 0, 1, 2, 3, 4

$$P(\xi=0)=C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

$$P(\xi=1)=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$$

$$P(\xi=2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$$

$$P(\xi=3)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$$

$$P(\xi=4)=C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$E(\xi)=4\times\frac{1}{2}=2.$$

【点睛】本题考查频率分布直方图，考查二项分布，属于基础题，对学生的数据处理能力有一定的要求.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n + b (n \in N^*)$.

(1) 求实数 b 的值及 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_n = \log_{\sqrt{2}} b_n$, 且 $c_n = \frac{b_n}{(b_n-1)(b_{n+1}-1)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) 0, $a_n = 2n$; (2) $T_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}$.

【解析】

【分析】(1) 由 $a_1 = S_1$ 求出 a_1 , 由 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求出 a_n , 利用 a_1, a_2, a_3 必成等差数列可求得 b , 从而得 a_n .

(2) 由 (1) 可求得 b_n , 对 $c_n = \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$ 裂项为 $\frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}$, 再相加.

【详解】(1) 由于 $S_n = n^2 + n + b (n \in N^*)$

所以当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2+b$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n$

又数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 故 $2a_2 = a_1 + a_3$, 即 $8 = 6 + 2 + b$

所以 $b=0$.

易验证此时数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列, $a_n = 2n$.

(2) 由题意及 (1) 知: $b_n = (\sqrt{2})^{2n} = 2^n$

$$\text{所以 } c_n = \frac{b_n}{(b_n-1)(b_{n+1}-1)} = \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}$$

$$\text{从而 } T_n = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

【点睛】考查等差数列的通项公式, 考查已知 S_n 与 a_n 的关系求数列通项公式, 考查裂项相消法求数列的和, 已知 S_n 与 a_n 的关系求数列通项公式时, 要注意只有 $n \geq 2$ 时才有 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 不包含 a_1 , $a_1 = S_1$, 它们的计算方法不一样, 注意验证.

19. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $2a \sin\left(\frac{\pi}{2} + C\right) + c = 2b$.

(1) 求内角 A 的大小.

(2) 已知点 D 在线段 BC 上, 且 AD 平分内角 A , 若 $AD=2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$

(2) $3+3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 利用正弦定理化边为角, 结合三角形的内角关系及两角和的正弦公式求得 $\cos A$, 即可得出答案;

(2) 由 AD 平分内角 A , 可得 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 再根据 $\triangle ABC$ 的面积结合余弦定理可求得 a 及 $b+c$, 即可得解.

【小问 1 详解】

解: 因为 $2a \sin\left(\frac{\pi}{2} + C\right) + c = 2b$,

所以 $2\sin A \cos C + \sin C = 2\sin B = 2\sin(A+C)$,

所以 $\sin C = 2\sin C \cos A$,

由于 $\sin C \neq 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$,

又 $0 < A < \pi$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$;

【小问2详解】

解: 由题意及(1)得: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $bc = 6$,

在 $\triangle ABC$ 中应用余弦定理得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \frac{1}{2}$,

即 $a^2 = (b+c)^2 - 18$,

又 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$,

即 $\frac{1}{2}bc \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}c \times 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}b \times 2 \times \frac{1}{2}$,

亦即 $b+c = \frac{\sqrt{3}}{2}bc = 3\sqrt{3}$,

所以 $a^2 = 9$, 即 $a = 3$,

从而 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+3\sqrt{3}$.

20. 已知曲线 $f(x) = x^3 - 3x + \lambda$ 在点 $A(m, f(m))$ 处的切线与曲线的另外一个交点为 B , P 为线段 AB 的中点, O 为坐标原点.

(1) 求 $f(x)$ 的极小值并讨论 $f(x)$ 的奇偶性.

(2) 直线 OP 的斜率记为 k , 若 $\forall m \in (0, 2)$, $k \geq 18$ 求实数 λ 的取值范围.

【答案】(1) 见解析 (2) $(-\infty, -7]$

【解析】

【分析】(1) 由导函数的正负可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 则极小值为 $f(1)$, 然后根据奇偶性的定义, 讨论参数 λ 即可判断函数的奇偶性;

(2) 由导函数求出在点 $A(m, f(m))$ 处的斜率, 并根据点斜式写出切线方程, 联立曲线方程可求得 B 点坐标, 再根据中点坐标公式求出 P 点坐标, 并求得直线 OP 的斜率, 将 $\forall m \in (0, 2), k \geq 18$, 转化为 $2\lambda \leq 7m^3 - 21m$ 恒成立问题, 设 $h(m) = 7m^3 - 21m$, 求出其最小值, 可得实数 λ 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 已知 $f(x) = x^3 - 3x + \lambda, x \in \mathbf{R}$,

则 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$,

当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 1)$ 上单调递减,

则当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + \lambda = \lambda - 2$,

当 $\lambda = 0$ 时, $f(x) = x^3 - 3x$, 显然 $f(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$, 且 $f(0) = -0^3 + 3 \times 0 = 0$

$\therefore f(x)$ 为奇函数;

当 $\lambda \neq 0$ 时, $f(-x) = -x^3 + 3x + \lambda = -(x^3 - 3x + \lambda) + 2\lambda = -f(x) + 2\lambda$,

所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

综上所述, $f(x)$ 的极小值为 $\lambda - 2$: 当 $\lambda = 0$ 时, $f(x)$ 为奇函数, 当 $\lambda \neq 0$ 时, $f(x)$ 为非奇非偶函数.

【小问 2 详解】

由 (1) 知 $f'(x) = 3x^2 - 3$, 所以曲线在点 $A(m, f(m))$ 处的切线方程为

$$y - (m^3 - 3m + \lambda) = (3m^2 - 3)(x - m),$$

其与原曲线方程 $y = x^3 - 3x + \lambda$,

$$\text{联立化简得, } (x - m)^2(x + 2m) = 0,$$

$$\text{从而 } B(-2m, -8m^3 + 6m + \lambda) (m \neq 0),$$

$$\text{由于 } P \text{ 为线段 } AB \text{ 的中点, 所以 } P\left(-\frac{m}{2}, \frac{-7m^3 + 3m + 2\lambda}{2}\right),$$

则直线 OP 的斜率 $k = \frac{7m^3 - 3m - 2\lambda}{m}$,

由于 $\forall m \in (0, 2)$, $k \geq 18$, 即当 $m \in (0, 2)$ 时, 恒有 $2\lambda \leq 7m^3 - 21m$,

令 $h(m) = 7m^3 - 21m$, 则 $h'(m) = 21m^2 - 21 = 21(m+1)(m-1)$,

易知当 $0 < m < 1$ 时, $h'(m) < 0$,

当 $1 < m < 2$ 时, $h'(m) > 0$,

即 $h(m)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, 2)$ 上单调递增,

所以当 $m \in (0, 2)$ 时, $h(m)_{\min} = h(1) = 7 - 21 = -14$,

所以 $2\lambda \leq -14 \Rightarrow \lambda \leq -7$,

从而实数 λ 的取值范围为 $(-\infty, -7]$.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x}$ (a 为常数) 的极大值为 $\frac{1}{e}$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若 $\forall x_2 \in (-\infty, 0)$ 总 $\exists x_1 \in \mathbb{R}$ 使得 $e^{x_2} f(x_1) = x_2$ 成立, 求 $\left| \frac{x_1}{x_2} \right|^e$ 的最大值.

【答案】(1) $a = 1$

(2) $y_{\max} = 1$

【解析】

【分析】(1) 求导, 对 a 分类讨论, 确定函数的单调性, 进而确定极值点, 即可求解,

(2) 根据 $e^{x_2} f(x_1) = x_2$ 以及单调性可得 $x_1 = e^{x_2}$, 进而代入得 $y = e^{f(x_1)} |f(x_1)|^e$, 两边同时取对数, 构造

函数 $h(t) = -t + e \ln t$, 利用导数求解 $h(t)$ 的最值, 进而可求解.

【小问 1 详解】

$f'(x) = \frac{a(1 - \ln x)}{x^2}$, 显然 $a = 0$ 不合题意.

若 $a > 0$, 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(e) = \frac{a}{e}$ ，由题意得 $\frac{a}{e} = \frac{1}{e}$ ，所以 $a = 1$ 。

若 $a \neq 0$ ，当 $0 < x < e$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $x > e$ 时， $f'(x) > 0$ ，即 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减，在 $(e, +\infty)$ 上单调递增，不合题意。

综上： $a = 1$ 。

【小问2详解】

由 (1) 知 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，所以 $e^{x_2} f(x_1) = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = \frac{x_2}{e^{x_2}} = f(e^{x_2})$

又 $x_2 \in (-\infty, 0)$ ，所以 $f(x_1) < 0, e^{x_2} \in (0, 1)$ ，从而 $\ln x_1 < 0$ ，所以 $0 < x_1 < 1$

由 (1) 知函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，所以 $f(x_1) = f(e^{x_2}) \Leftrightarrow x_1 = e^{x_2}$

令 $y = \frac{e^{f(x_1)}}{\left| \frac{x_2}{x_1} \right|^e} = e^{f(x_1)} \left| \frac{x_2}{x_1} \right|^e = e^{f(x_1)} |f(x_1)|^e$ ，两边取自然对数得：

$\ln y = f(x_1) + e \ln |f(x_1)| = -t + e \ln t$ ，其中 $t = -f(x_1) \in (0, +\infty)$ 。

令 $h(t) = -t + e \ln t$ ，则 $h'(t) = -1 + \frac{e}{t} = \frac{e-t}{t}$

易知当 $t \in (0, e)$ 时， $h'(t) > 0$ ；当 $t \in (e, +\infty)$ 时， $h'(t) < 0$ ，即 $h(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，在 $(e, +\infty)$ 单调递减。

所以当 $t = e$ 时， $h(t)_{\max} = h(e) = 0$ 。

从而 $y_{\max} = 1$ 。

22. 已知曲线 $C_1: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi \\ y = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数，且 $0 \leq \varphi < 2\pi$)，直线 $C_2: x = 4$ ，以坐标原点 O 为极点，

x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系。

(1) 求曲线 C_1 与直线 C_2 的极坐标方程；

(2) 射线 $C_3: \theta = \frac{\pi}{4}$ 与曲线 C_1 的一个交点为 A (A 不是原点)，与直线 C_2 的交点为 B ，求 $\frac{|OB|}{|OA|}$ 的值。

【答案】(1) C_1 的极坐标方程为： $\rho = 2(\sin \theta + \cos \theta)$ ， C_2 的极坐标方程为： $\rho = \frac{4}{\cos \theta}$ ；

(2) 2。

【解析】

【分析】(1) 消参得曲线 C_1 的普通方程，再由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 转化为极坐标方程；

(2) 根据极坐标方程求出 A, B 点的极径即可得解.

【小问 1 详解】

消去参数得曲线 C_1 的普通方程为: $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$,

由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 可得 C_1 的极坐标方程为: $\rho = 2(\sin \theta + \cos \theta)$,

C_2 的极坐标方程为: $\rho = \frac{4}{\cos \theta}$.

【小问 2 详解】

根据极坐标方程及极径的意义可知:

$$|OA| = 2\left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}, \quad |OB| = \frac{4}{\cos \frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } \frac{|OB|}{|OA|} = 2.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线