2007年女子数学奥林匹克

第一天

1. 设 m 为正整数，如果存在某个正整数 n，使得 m 可以表示为 n 和 n 的正约数个数（包括 1 和自身）的商，则称 m 是“好数”。求证：

（1）1，2，…，17 都是好数；

（2）18 不是好数。

2．设△ABC 是锐角三角形，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上，线段 AD、BE、CF 经过△ABC 的外心 O。已知以下六个比值

$\frac{BD}{DC}$、$\frac{CE}{EA}$、$\frac{AF}{FB}$、$\frac{BF}{FA}$、$\frac{AE}{EC}$、$\frac{CD}{DB}$

中至少有两个是整数。求证：△ABC 是等腰三角形。

3．设整数 $n(n>3)$，非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2.$

求 $\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+1}$ 的最小值。

4．平面内 $n(n\geq 3)$ 个点组成集合 S，P 是此平面内 m 条直线组成的集合，满足 S 关于 P 中的每一条直线对称。求证：$m\leq n$，并问等号何时成立？

第二天

5．设 D 是△ABC 内的一点，满足∠DAC=∠DCA=30°，∠DBA=60°，E 是边 BC 的中 点，F 是边 AC 的三等分点，满足 AF=2FC。求证：DE⊥EF。

6．已知 a、b、c≥0，$a+b+c=1.$求证：

$$\sqrt{a+\frac{1}{4}(b-c)^2}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3}.$$

7．给定绝对值都不大于 10 的整数 a、b、c，三次多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 满足条件 $|f(2+\sqrt{3})|<0.0001.$ 问：$2+\sqrt{3}$ 是否一定是这个多项式的根？

8．n 个棋手参加象棋比赛，每两个棋手比赛一局。规定：胜者得 1 分，负者得 0 分，平局各得 0.5 分。如果赛后发现任何 m 个棋手中都有一个棋手胜了其余 m—1 个棋手，也有一个棋手输给了其余 m—1 个棋手，就称此赛况具有性质 $P(m)$.

对给定的 $m(m\geq 4)$，求 n 的最小值 $f(m)$，使得对具有性质 $P(m)$ 的任何赛况，都有所有 n 名棋手的得分各不相同。

综上，最少取出 11 枚棋子，才可能满足要求。

三、定义集合 $A=\{m\sqrt{k+1}\mid m\in\mathbf{N}_{+},k\in P\}$.

由于对任意的 k、$i\in P,且k\neq i,\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$ 是无理数，则对任意的 k_1、$k_2\in P$ 和正整数 m_1、m_2，

$$m_1\sqrt{k_1+1}=m_2\sqrt{k_2+1}\Leftrightarrow m_1=m_2,k_1=k_2.$$

注意到 A 是一个无穷集。现将 A 中的元素按从小到大的顺序排成一个无穷数列。对于任意的正整数 n，设此数列中的第 n 项为 $\sqrt{k+1}$.

接下来确定 n 与 m、k 间的关系。

若 $m_1\sqrt{i+1}\leq m\sqrt{k+1},则m_1\leq m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$.

由 m_1 是正整数知，对 $i=1,2,3,4,5$，满足这个条件的 m_1 的个数为 $[m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}]$.

从而，$n=\sum\limits_{i=1}^{5}[m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}]=f(m,k)$.

因此，对任意 $n\in N_{+},存在m\in N_{+},k\in P,使得f(m,k)=n$.

参考答案

第一天

1．记 $d(n)$ 为正整数 n 的正约数的个数。

（1）因为 $p=\dfrac{8p}{d(8p)}(p=3,5,7,11,13,17)$，又

$$1=\frac{2}{d(2)},2=\frac{8}{d(8)},4=\frac{36}{d(36)},6=\frac{72}{d(72)},$$

$$8=\frac{96}{d(96)},9=\frac{108}{d(108)},10=\frac{180}{d(180)},$$

$$12=\frac{240}{d(240)},14=\frac{252}{d(252)},$$

$$15=\frac{360}{d(360)},16=\frac{128}{d(128)},$$

所以，1，2，⋯，17 都是好数。

（2）假设存在正整数 n，使得

$$\frac{n}{d(n)}=18. \qquad ①$$

则可设 $n=2^{\alpha}0\cdot 3^{\beta}0p_1^{\alpha}1\cdots p_k^{\alpha}k$,其中, $p_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是大于 3 的相异质数，

$\alpha_0\ge 1,\beta_0\ge 2,\alpha_i\ge 1(i=1,2,\cdots,k).$

令 $\alpha_0-1=a,\beta_0-2=b.$显然$a\ge 0,b\ge 0.$

由式①得

$a^a\cdot 3^b p_1^a1\cdots p_k^ak$

$=(a+2)(b+3)(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1). \qquad ②$

由于对任意质数 p_i都有$p_i^ai\ge\alpha_i+1$，从而，

$(a+2)(b+3)\ge 2^a3^b.$

如果 $b\ge 3,$则$3^b>3(b+3).$

而 $a\ge 0$时,$2^a\ge\dfrac{1}{2}(a+2),$ 则

$$2^a3^b > \frac{3}{2}(a+2)(b+3),$$

矛盾.故$b \le 2$.

因此,$b=2, a=0; b=1, a=0,1,2;$

$b=0, a=0,1,2,3,4.$

（i）当$b=2, a=0$时，式②为

$$3^2 p_1^a 1 \cdots p_k^a k = 10(\alpha_1+1)+(\alpha_k+1).$$

（ii）当$b=1, a=0,1,2$时，式②为

$$3 \cdot 2^a p_1^a 1 \cdots p_k^a k = 2^2(a+2)(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

（iii）当$b=0, a=0,1,2,3,4$时，式②为

$$2^a p_1^a 1 \cdots p_{kj}^a k = 3(a+2)(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

（i）（ii）（ii）均不成立。

综上，18 不是好数。

2．从六个比值中取出两个，共有两种类型：

（1）涉及同一边；（2）涉及不同的边。

（1）如果同一边上的两个比值同时是整数，不妨设为$\frac{BD}{DC}$、$\frac{CD}{DB}$.因它们互为倒数，又同是整数，所以，必须都取 1，则 BD=DC。

由于 O 是△ABC 的外心，进而得 AD 是边 BC 的中垂线。于是，AB=AC。

（2）记∠CAB=α，∠ABC=β，∠BCA=γ。

因为△ABC 是锐角三角形，所以，

∠BOC=2α，∠COA=2β，∠AOB=2γ。

于是，$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAC}}=\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$.

同理，$\frac{CE}{EA}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma}, \frac{AE}{FB}=\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$.

若上述六个比值中有两个同时是整数且涉及不同的边时，则存在整数 *m*、*n*，使得

$\sin 2x = m\sin 2z$且$\sin 2y = n\sin 2z$　　①

或$\sin 2z = m\sin 2x$且$\sin 2z = n\sin 2y$，　　②

其中，*x*、*y*、*z* 是α、β、γ的某种排列。

以下构造△$A_1B_1C_1$，使得它的三个内角分别为 180°—2α，180°—2β，180°—2γ。如图 1，过点 A、B、C 分别作△ABC 外接圆的切线，

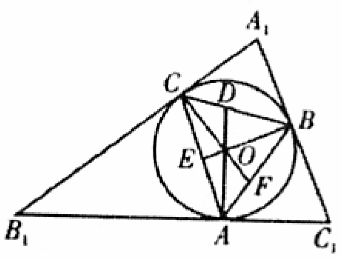

图 1

所围成的△$A_1B_1C_1$即满足要求。

根据正弦定理，知△$A_1B_1C_1$的三边与$\sin 2\alpha$、$\sin 2\beta$、$\sin 2\gamma$成正比。在式①、②两种情况下，可知其三边之比分别为 1:m:n 或 m: n: mn.

对于式①，由三角形两边之和大于第三边，可知必须 m = n;

对于式②，要保证$m+n>mn$,即$(m-1)(n-1)<1$，由此，m、n 中必有一个为 1。

无论哪种情况，都有△$A_1B_1C_1$是等腰三角形。

因此，△ABC 也是等腰三角形。

3．由$a_1+a_2+\cdots a_n=2$，知问题等价于求

$$a_1-\frac{a_1}{a_2^2+1}+a_2-\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+a_n-\frac{a_n}{a_1^2+1}$$

$$=\frac{a_1a_2^2}{a_2^2+1}+\frac{a_2a_3^2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_na_1^2}{a_1^2+1}\text{的最大值.}$$

因为$x^2+1\geq 2x$,所以,当$x>0,y\geq 0$时，

$$\frac{1}{2x}\geq\frac{1}{x^2+1},\frac{yx^2}{2x}\geq\frac{yx^2}{x^2+1},$$

即$\frac{yx^2}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}xy$;

当$x=0$时,上式也成立.

$$\text{故}\frac{a_1a_2^2}{a_2^2+1}+\frac{a_2a_3^2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_na_1^2}{a_1^2+1}$$

$$\leq\frac{1}{2}(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1).$$

引理,若$a_1,a_2,\cdots,a_n\geq 0(n\geq 4)$,则

$$4(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1)\leq(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2.$$

引理的证明:设

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

$$=4(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2.$$

下面用数学归纳法证明

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leq 0. \qquad ①$$

当$n=4$时，不等式①等价

$$4(a_1+a_3)(a_2+a_4)\leq(a_1+a_2+a_3+a_4)^2.$$

由平均值不等式知，命题成立。

假设不等式①对$n=k(k\geq 4)$时成立。

对于$n=k+1$，不妨设

$$a_k=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}\},$$

$$\text{则}f(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})-f(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},a_k+a_{k+1})$$

$$=4[a_{k-1}a_k+a_ka_{k+1}+a_1a_{k+1}-a_{k-1}(a_k+a_{k+1})-(a_k+a_{k+1})a_1]$$

$$=-4[(a_{k-1}-a_k)a_{k+1}+a_1a_k]\le 0,$$

$$\text{即}f(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})\le f(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},a_k+a_{k+1}).$$

由归纳假设知，上式右边小于或等于 0，即当$n=k+1$时，不等式①成立。

回到原题。

由引理知

$$\frac{1}{2}(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)$$

$$\le\frac{1}{8}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=\frac{1}{8}\times 2^2=\frac{1}{2}.$$

$$\text{故}\frac{a_1a_2^2}{a_2^2+1}+\frac{a_2a_3^2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_na_1^2}{a_1^2+1}\le\frac{1}{2},\text{即}$$

$$\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+1}\ge\frac{3}{2}.$$

当$a_1=a_2=1,a_3=\cdots=a_n=0$时,上式取等号.

因此，所以最小值为$\frac{3}{2}$.

4.（1）记 S 中的 n 个点为 A_1，A_2，…，A_n.

建立直角坐标系，设$A_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$.

易证$\sum_{i=1}^{n}BA_i=0\Leftrightarrow B(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i)$.

这说明，平面内存在唯一的一点 B，使$\sum_{i=1}^{n}BA_i=0$.我们称 B 为点集 S 的“质心”。

如果任取 P 中一条直线 l 为 x 轴，建立直角坐标系，则$\sum_{i=1}^{n}y_i=0$.

故点 B 在 l 上。即 P 中每一条直线均过质心 B。

（2）设

$$F=\{\text{三元有序组}(X,Y,l)\mid X,Y\in S,l\in P,X\text{与}Y\text{关于}l\text{对称}\},$$

$$F_1=\{(X,Y,l)\in F\mid X\ne Y\},$$

$$F_2=\{(X,Y,l)\in F\mid X\text{在}l\text{上}\}.$$

显然，$F=F_1\bigcup F_2,F_1\bigcap F_2=\phi.$ ①

考虑 P 中任一直线 l，X 为 S 中任一点，X 关于 l 的对称点 Y 是唯一的。即对每一个 l，

三元有序组（X，Y，l）有 n 个，故

$$|F|=mn. \qquad ②$$

对于 F_1 中的三元有序组（X，Y，l），因为不同的两点 X、Y 的对称轴只有 1 条，所以，

$$=2C_n^2=n(n-1). \qquad ③$$

（i）当 S 中任一点至多在 P 中的一条直线 l 上时，

$$|F_2|\le\{X\mid X\in S\}=n. \qquad ④$$

由式①、②、③、④得 $mn\le n(n-1)+n$，即 $m\le n.$

（ii）当 S 中存在一点同时在 P 中的两条直线上时，由（1）所证，此点即为质点 B。

考虑集合 $S'=S\setminus\{B\}$，此时，S' 仍关于 P 中的每条直线对称，由（i）所证，

得 $m\le|S'|=n-1.$

综合（i）、（ii）得 $m\le n.$

（3）当 $m=n$ 时，由（2）所证，式③、④同时取等号，即 S 中任意两点的中垂线均属于 P，S 中每点恰在 P 中的一条直线，同时，质心 B 不在 S 中。

首先，指出 $BA_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 相等。否则，如果存在 j、$k\,(1\le j<k\le n)$，使得 $BA_j\ne BA_k$，则线段 A_jA_k 的对称轴不过点 B，与（1）所证矛盾。因此，A_1，A_2，…，A_n 均在以点 B 为圆心的圆上，记此圆为⊙B。不妨设 A_1，A_2，…，A_n 按顺时针排列。

其次，A_1，A_2，…，A_n 是⊙B 的 n 个等分点。否则，

如果存在 $i\,(i=1,2,\cdots,n)$，使 $A_iA_{i+1}\ne A_{i+1}A_{i+2}$（定义 $A_{n+1}=A_1, A_{n+2}=A_2$）。不妨设 $A_iA_{i+1}<A_{i+1}A_{i+2}$.

如图 2，线段 A_iA_{i+2} 的对称轴 $l'\in P$，而 A_{i+1} 关于 l' 的对称点在 $A_{i+1}A_{i+2}$（不含端点）上。这与 A_{i+1}、A_{i+2} 是相邻两点矛盾。

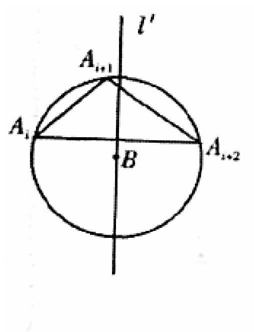

图 2

因此，当 $m=n$ 时，集 S 中的点是正 n 边形的 n 个顶点。
易知正 n 边形确有 n 条对称轴。
故当且仅当 S 中的点组成正 n 边形 n 个顶点，P 是正 n 边形的 n 条对称轴时，$m=n.$

第二天

5．证法 1：如图 3，作 DM⊥AC 于点 M，FN⊥CD 于点 N，联结 EM、EN。

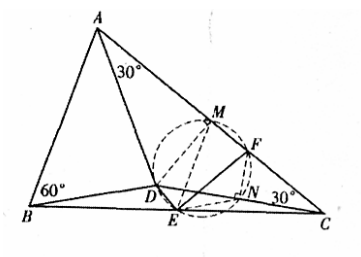

图 3

设 CF=a，AF=2a，则

$$CN=CF\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{1}{2}CD,$$

即 N 是 CD 的中点。

又因为 M 是边 AC 上的中点，E 是边 BC 上的中点，所以，EM//AB，EN//BD，得∠MEN=∠ABD=60° =∠MDC。

故 M、D、E、N 四点共圆。

又因 D、M、F、N 四点共圆，所以，D、E、F、M、N 五点共圆。

从而，∠DEF=90°

证法 2：建立复平面，令

$$B=0,D=1,A=-\omega^2 k.$$

经计算可得

$$C=1-\omega^2-\omega k,$$

$$E=\frac{B+C}{2}=\frac{1-\omega^2-\omega k}{2},$$

$$F=\frac{2C+A}{3}=\frac{2-2\omega^2-2\omega k-\omega^2 k}{3}.$$

$$\text{于是},E-1=-\frac{1+\omega^2+\omega k}{2},$$

$$F-E=\frac{1-\omega^2-(\omega+2\omega^2)k}{6}.$$

$$\text{故}\frac{F-E}{E-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\omega^2-1+(\omega+2\omega^2)k}{1+\omega^2+\omega k}$$

$$=\frac{\omega-\omega^2}{3}\cdot\frac{k+1}{k-1}=\frac{i}{\sqrt{3}}\cdot\frac{k+1}{k-1}.$$

$$\text{因此},DE\perp EF,\text{即}\angle DEF=90^\circ.$$

6．证法 1：不妨设$b\geq c.$令

$$\sqrt{6}=x+y,\sqrt{c}=x-y.$$

$$\text{则}b-c=4xy,a=1-2x^2-2y^2,x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\sqrt{a+\frac{1}{4}(b-c)^2}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

$$=\sqrt{1-2x^2-2y^2+4x^2y^2}+2x$$

$$\leq\sqrt{1-2x^2}+x+x\leq\sqrt{3}.$$

最后一步由柯西不等式得到。

证法 2：令 $a=u^2,b=v^2,c=w^2$，则

$$u^2+v^2+w^2=1.$$

于是，所证不等式变为

$$\sqrt{u^2+\frac{(v^2-w^2)^2}{4}}+v+w\le\sqrt{3}. \qquad ①$$

注意到

$$u^2+\frac{(v^2-w^2)^2}{4}=1-(v^2+w^2)+\frac{(v^2-w^2)^2}{4}$$
$$=\frac{4-4(v^2+w^2)+(v^2-w^2)^2}{4}$$
$$=\frac{4-4(v^2+w^2)+(v^2+w^2)^2-4v^2w^2}{4}$$
$$=\frac{(2-v^2-w^2)^2-4v^2w^2}{4}$$
$$=\frac{(2-v^2-w^2-2vw)(2-v^2-w^2+2vw)}{4}$$
$$=\frac{[2-(v+w)^2][2-(v-w)^2]}{4}$$
$$\le1-\frac{(v+w)^2}{2},$$

其中,$(v+w)^2\le2(v^2+w^2)\le2.$

将上式代入式①，所证不等式变为

$$\sqrt{1-\frac{(v+w)^2}{2}}+v+w\le\sqrt{3}.$$

令$\frac{v+w}{2}=x$,将上述不等式改写为$\sqrt{1-2x^2}+2x\le\sqrt{3}.$

以下同证法 1。

注：证法 2 解释了证法 1 中替换的动机。

7. 将$2+\sqrt{3}$代入得

$f(2+\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})^3+a(2+\sqrt{3})^2+b(2+\sqrt{3})+c$
$=8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}+4a+4\sqrt{3}a+3a+2b+\sqrt{3}b+c$
$=(26+7a+2b+c)+(15+4a+b)\sqrt{3}.$
设$7a+2b+c+26=m,4a+b+15=n,$则
$|m|<130,|n|\leq 65.$
故$|m-n\sqrt{3}|\leq|m|+|n\sqrt{3}|<260.$
如果$f(2+\sqrt{3})\neq 0$,即$m+n\sqrt{3}\neq 0$,由于$m,n\in\mathbf{Z},\sqrt{3}$是无理数,
则$m\neq 0$且$n\neq 0$.由此,$m-n\sqrt{3}\neq 0.$
所以,$m^2-3n^2\neq 0,|m^2-3n^2|\geq 1.$
则$|f(2+\sqrt{3})|=|m+n\sqrt{3}|=\left|\dfrac{(m-n\sqrt{3})(m+n\sqrt{3})}{m-n\sqrt{3}}\right|=\left|\dfrac{m^2-3n^2}{m-n\sqrt{3}}\right|$
$\geq\left|\dfrac{1}{m-n\sqrt{3}}\right|>\dfrac{1}{260}$,矛盾.
因此,$2+\sqrt{3}$一定是上述多项式的根.

8．先证明两个引理。

引理 1　当$n\geq m$时,如果n个棋手的赛况具有性质$P(m)$，则必有一个棋手全胜。

引理 1 的证明：当 $n=m$ 时，命题显然成立。
假设命题对 n 成立。
则对 $n+1$个棋手，从中任取 n 个棋手，由归纳假设，这 n 个棋手中必有一个棋手全胜。不妨设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$中A_1全胜。

若 A_1 胜 A_{n+1},则在$n+1$棋手中,A_1全胜；

若 A_1 平 A_{n+1},考察棋手$A_1,A_2,\cdots,A_{n-1},A_{n+1}$,这 n 个棋手中没人全胜，不可能；

若 A_{n+1}胜A_1,考察棋手$A_1,A_3,A_4,\cdots,A_n,A_{n+1}$,这 n 个棋手中全胜的只能是 A_{n+1},即A_{n+1}胜$A_3,A_4,\cdots,A_n$.同理,A_{n+1}也胜A_2.因此,在这$n+1$个棋手中A_{n+1}全胜。

由归纳原理知，命题对任意 $n\geq m$ 成立。
类似地可证：

引理 2　当 $n\geq m$ 时，如果 n 个棋手的赛况具有性质 $P(m)$，则必有一个棋手全败。

回到原题。
接下来证明：当 $n\geq 2m-3$ 时，所有棋手的得分必各不相同。
由引理 1，有一个棋手 A_1 胜了其余 n—1 个棋手，有一个棋手 A_2 胜了除 A_1 外的 n—2 个棋手，……有一个棋手 A_{n-m+1}胜了除$A_1,A_2,\cdots,A_{n-m}$外的$m-1$个棋手。

由引理 2，有一个棋手 A_n负于其余$n-1$个棋手，有一个棋手 A_{n-1}负于除了A_n外的

$n-2$ 个棋手，……有一个棋手 A_{n-m+3} 负于除 $A_n, A_{n-1}, \cdots, A_{n-m+4}$ 外的 $n-m+2$ 个棋手，另外，还有一棋手为 A_{n-m+2}.

这样，这 n 个棋手 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 编号小的棋手都战胜了编号大的棋手，因此，他们的得分为 $n-1, n-2, \cdots, 1, 0$，各不相同。

对 $n=2m-4$, 设 n 个棋手水平为

$1, 2, \cdots, m-3, m-2, m-2, m-1, \cdots, 2m-5,$ 其中，编号小的棋手胜编号大的棋手，编号相等的棋手打平。则对任取 m 个棋手，必有一个最小编号为 $i(1 \le i \le m-3),$ 另一个最大编号为 $j(m-1 \le j \le 2m-5)$，从而，在这 m 个棋手中编号为 i 的棋手全胜，编号为 j 的棋手全败。

所以，这 n 个棋手具有性质 $P(m)$，但其中有两个棋手的得分相同。

综上，$f(m) = 2m-3.$