2023年高三下学期5月三校联考

高三数学试卷参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	B	D	D	C	D

二、选择题：

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABC	AC	ABD

三、填空题：

13．8　　　　14．$(-\infty,1]$　　　　15．190　　　　16．$\dfrac{64}{9}$

四、解答题：

17.【解析】(1) 因为 $a_na_{n+1}=4S_n-1$，所以 $a_{n+1}a_{n+2}=4S_{n+1}-1$．

两式相减，得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=4a_{n+1}$．

因为 $a_{n+1}\neq 0$，所以 $a_{n+2}-a_n=4$．　　2 分

所以 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 1 为首项，4 为公差的等差数列，$\{a_{2n}\}$ 是以 3 为首项，4 为公差的等差数列．

所以 $a_{2n-1}=1+(n-1)\times4=4n-3$，$a_{2n}=3+(n-1)\times4=4n-1$．　　4 分

故 $a_n=2n-1$．　　5 分

(2) 因为 $\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$，　　6 分

所以 $T_n=\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_2}-\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}=\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$．　　8 分

因为 $S_n=\dfrac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$，所以 $T_n=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$．　　10 分

18.【解析】(1) 因为 $6S=b(a+c)$，所以 $6\times\dfrac{1}{2}\times bc\sin A=b(a+c)$，　　1 分

因为 $\sin A=\dfrac{2}{3}$，代入上式可解得 $3c\times\dfrac{2}{3}=a+c$，即 $a=c$，　　3 分

所以 $\sin C=\sin A=\dfrac{2}{3}$，$\cos C=\cos A=\dfrac{\sqrt5}{3}$，　　4 分

所以 $\cos B=-\cos(A+C)=\dfrac{1}{9}$．　　6 分

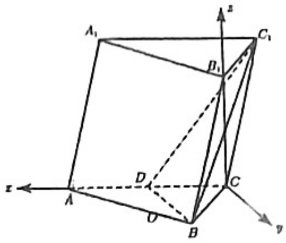
(2) 因为 $6S=b(a+c)$，所以 $6\times\dfrac{1}{2}\times bc\sin A=b(a+c)$，即 $3bc\sin A=b(a+c)$，

因为 $b=3$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\dfrac{\sqrt3}{2}ac=a+c$．　　8 分

由余弦定理知 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $9=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac=\dfrac{3}{4}(ac)^2-3ac$，

解得 $ac=6$， 10 分

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$． 12 分



19.【解析】(1) 因为点 D 为棱 AC 的中点，$DA=DB$，

所以 $BC\perp AB$． 1 分

因为 $B_1C\perp$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $B_1C\perp AB$．

又因为 $BC\cap B_1C=C$，$BC,B_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1． 3 分

因为 $CC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AB\perp CC_1$． 4 分

(2) 设 $CB_1=t(t>0)$．

以 CA 为 x 轴，CB_1 为 z 轴，过点 C 与 CA 垂直的直线为 y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0),A(4,0,0),D(2,0,0),B(1,\sqrt{3},0),B_1(0,0,t)$． 5 分

所以 $\overrightarrow{BB_1}=(-1,-\sqrt{3},t),\overrightarrow{BC}=(-1,-\sqrt{3},0),\overrightarrow{BD}=(1,-\sqrt{3},0)$， 6 分

设平面 BDC_1 的法向量为 $n=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BD}=x-\sqrt{3}y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BC_1}=-2x-2\sqrt{3}y+tz=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}t$，则 $y=t$，$z=4\sqrt{3}$．所以 $n=(\sqrt{3}t,t,4\sqrt{3})$． 8 分

所以 $\cos<\overrightarrow{BB_1},n>=\frac{\overrightarrow{BB_1}\cdot n}{|\overrightarrow{BB_1}|\cdot|n|}=\frac{2\sqrt{3}t}{\sqrt{4+t^2}\cdot\sqrt{4t^2+48}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{48}{t^2}+16+t^2}}$ 10 分

$\leqslant\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\sqrt{3}+16}}=\frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$（当且仅当 $\frac{48}{t^2}=t^2$，即 $t=2\sqrt[4]{3}$ 时，等号成立）．

所以直线 BB_1 与平面 BDC_1 所成角的正弦的最大值为 $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$． 12 分

20.【解析】(1) 第 85%分位数 $=45+\frac{0.85-0.65}{0.3}\times10=51.67$（岁）． 3 分

(2) 因为 $\bar{x}=(20\times0.01+30\times0.02+40\times0.035+50\times0.03+60\times0.005)\times10=40$， 5 分

所以 $\mu=40$，所以 $P(X>61)=P(X>\mu+2\sigma)=\frac{1-0.9545}{2}=0.02275$，

所以使用该 APP 且年龄大于 61 周岁的人数占左右喜欢使用该 APP 的 2.275%. 7 分

(3) 根据题意 $X\sim B(8,0.2)$，要使 $P(X=k)$ 取得最大值，则 $\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\\ P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\end{cases}$ 9 分

所以 $\begin{cases}C_8^k0.2^k0.8^{8-k}\geqslant C_8^{k+1}0.2^{k+1}0.8^{7-k},\\ C_8^k0.2^k0.8^{8-k}\geqslant C_8^{k-1}0.2^{k-1}0.8^{9-k},\end{cases}$ 解得 $\frac{4}{5}\leqslant k\leqslant\frac{9}{5}$，

因为 $k\in\mathbf{N}$，所以 $k=1$． 12 分

21.【解析】(1) 设双曲线 C 的焦距为 $2c$，其中 $c^2=a^2+b^2$，则 $F_1(-c,0),F_2(c,0),H(1,0)$．

所以 $\overrightarrow{HF_1}=(-c-1,0)$，$\overrightarrow{HF_2}=(c-1,0)$． 1 分

由 $\overrightarrow{HF_1}+3\overrightarrow{HF_2}=\mathbf{0}$，有 $-c-1+3(c-1)=0$，得 $c=2$．所以 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$． 2 分

因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，有 $T(1,\frac{b}{a})$，

所以 $\overrightarrow{TF_1}=(-3,-\frac{b}{a})$，$\overrightarrow{TF_2}=(1,-\frac{b}{a})$．

由 $\overrightarrow{TF_1}\cdot\overrightarrow{TF_2}=-2$，有 $-3+\frac{b^2}{a^2}=-2$，即 $-3+\frac{4-a^2}{a^2}=-2$，得 $a^2=2$． 4 分

所以 $b^2=c^2-a^2=2$，所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$． 5 分

（2）设 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

联立方程组 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1. \end{cases}$ 得 $(1-k^2)x^2+2k^2x-k^2-2=0$．

所以 $1-k^2\neq 0$，$\Delta=4k^4-4(1-k^2)(-k^2-2)>0$，$x_1+x_2=\frac{2k^2}{k^2-1}$，$x_1\cdot x_2=\frac{k^2+2}{k^2-1}$． 7 分

所以 $k_{AF_2}+k_{BF_2}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{k(x_1-1)}{x_1-2}+\frac{k(x_2-1)}{x_2-2}=k\times\frac{2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$=\frac{k}{(x_1-2)(x_2-2)}[2\times\frac{k^2+2}{k^2-1}-3\times\frac{2k^2}{k^2-1}+4]=0$． 10 分

所以 $k_{BF_2}=-k_{AF_2}$，即 $\angle MF_2H=\angle NF_2H$．

因为 $MN\perp HF_2$，所以 $HM=HN$． 12 分

22．【解析】（1）①因为 $f(x)=e^x+b\sin x$，所以 $f'(x)=e^x+b\cos x$．

所以切线的斜率 $k=f'(0)=1+b$．

又因为切线的斜率为 2，所以 $1+b=2$．解得 $b=1$． 2 分

②由①得 $b=1$，所以 $f(x)=e^x+\sin x,x\in(-\pi,+\infty)$，$f'(x)=e^x+\cos x$．

因为 $f''(x)=e^x-\sin x>0$ 恒成立，所以 $f'(x)$ 单调递增． 3 分

又 $f'(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，$f'(-\pi)=e^{-\pi}-1<0$，所以存在 $x_0\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$，使 $f'(x_0)=e^{x_0}+\cos x_0=0$．

x	$(-\pi,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	·		+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 存在唯一的极小值点 x_0，$f(x_0)=e^{x_0}+\sin x_0=\sin x_0-\cos x_0=\sqrt{2}\sin(x_0-\frac{\pi}{4})$． 5 分

因为 $x_0\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$，所以 $x_0-\frac{\pi}{4}\in(-\frac{5\pi}{4},-\frac{3\pi}{4})$．所以 $\sqrt{2}\sin(x_0-\frac{\pi}{4})\in(-1,1)$．

所以 $f(x_0)>-1$． 6 分

（2）$f(x)=e^x+b\sin x,x\in(-\pi,+\infty)$．

令 $f(x)=0$，即 $e^x+b\sin x=0$，所以 $-\frac{1}{b}=\frac{\sin x}{e^x}$．

令 $g(x)=\frac{\sin x}{e^x},x\in(-\pi,+\infty)$，则 $g'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}=-\frac{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}{e^x}$．

令 $g'(x)=0$，得 $x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\geqslant -1,k\in\mathbf{Z}$． 7 分

所以当 $x\in(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi)$ 时，$\sin(x-\frac{\pi}{4})>0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\frac{9\pi}{4}+2k\pi)$ 时，$\sin(x-\frac{\pi}{4})<0$，$g(x)$ 单调递增．

所以当 $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,k\geqslant -1,k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)$ 取得极小值．

即当 $x=-\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\cdots$ 时，$g(x)$ 取得极小值． 9 分

又因为 $\sin(-\frac{3\pi}{4})=\sin\frac{5\pi}{4}=\cdots=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\frac{3\pi}{4}<(\frac{5\pi}{4})<\cdots$，所以 $g(-\frac{3\pi}{4})<g(\frac{5\pi}{4})<\cdots$．

又因为在 $(-\pi,-\frac{3\pi}{4})$ 上 $g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)\geqslant g(-\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$． 10 分

当 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\geqslant 0,k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)$ 取得极大值，即当 $x=\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4},\cdots$ 时，$g(x)$ 取得极大值．

又因为 $\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{9\pi}{4}=\cdots=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$e^{\frac{\pi}{4}}<e^{\frac{9\pi}{4}}<\cdots$，所以 $g(\frac{\pi}{4})>g(\frac{9\pi}{4})>\cdots$．

所以 $g(x)\leqslant g(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$． 11 分

当 $(-\pi,+\infty)$ 时，$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\leqslant g(x)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$．

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\leqslant -\frac{1}{b}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$．

因为 $b>0$，所以 $b\geqslant\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上有零点．

所以实数 b 的取值范围为 $[\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}},+\infty)$． 12 分