

2024 届新高三开学联考

数学试题

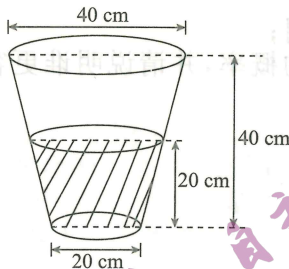
本试卷共 4 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 的虚部小于 0, 且 $z^2 = -1$, 则 $z(1-z) =$
 A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$
2. 已知集合 $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid y = \ln(1-x^2)\}$, $N = \{-1, 0, 1\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $\{0\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$
 C. $\{-1, 1\}$ D. \emptyset
3. 最早的测雨器记载见于南宋数学家秦九韶所著的《数书九章》(1247 年)。该书第二章为“天时类”, 收录了有关降水量计算的四个例子, 分别是“天池测雨”、“圆罍测雨”、“峻积验雪”和“竹器验雪”。如图“竹器验雪”法是下雪时用一个圆台形的器皿收集雪量(平地降雪厚度 = 器皿中积雪体积除以器皿口面积), 已知数据如图(注意: 单位 cm), 则平地降雪厚度的近似值为



- A. $\frac{91}{12}$ cm B. $\frac{31}{4}$ cm
 C. $\frac{95}{12}$ cm D. $\frac{97}{12}$ cm
4. 已知公差为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_6 = 2a_3$, 则 $\frac{S_{17}}{a_3} =$
 A. 17 B. 34 C. 48 D. 51
5. 已知 $a^{\log_3 a} = 3^{\log_3 81}$, 则 $a =$
 A. 9 或 $\frac{1}{3}$ B. 81 或 $\frac{1}{3}$
 C. 9 或 $\frac{1}{9}$ D. 81 或 $\frac{1}{81}$
6. 已知 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \varphi\right)$ ($\varphi \in [0, \pi)$) 在 $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ 上单调递减, 且 $f(0) = \frac{1}{2}$, 则
 A. $\varphi = \frac{\pi}{6}$ B. $\varphi = \frac{\pi}{3}$ C. $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ D. $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

7. 已知直线 $x - y + \frac{1}{4} = 0$ 与抛物线 $y = x^2$ 相交于 A, B 两点, 过线段 AB 的中点 P 作一条垂直于 x 轴的直线 m 与直线 $l: y = -\frac{1}{4}$ 交于点 Q , 则 $\triangle QAB$ 的面积为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

8. 若 $a = 0.001 + \sin 0.001, b = \ln 1.001, c = e^{0.001} - 1$, 则

- A. $b > c > a$ B. $c > a > b$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 铁棍的长度随温度的改变发生变化, 某试验室在某个时段每隔一个小时测得同一根铁棍的长度依次为 3.62, 3.61, 3.65, 3.62, 3.63, 3.63, 3.62, 3.64 (单位: cm), 则

- A. 铁棍长度的极差为 0.04 cm
 B. 铁棍长度的众数为 3.62 cm
 C. 铁棍长度的中位数为 3.625 cm
 D. 铁棍长度的第 80 百分位数为 3.63 cm

10. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 6 = 0, M(x, y)$ 为圆 C 上任意一点, $A(1, -1)$, 则

A. $|MC| = 1$

B. 直线 $l: y = x + b$ 过点 A , 则 C 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{7} - 1 \leq |MA| \leq \sqrt{7} + 1$

D. 圆 C 与坐标轴相交所得的四点构成的四边形面积为 $4\sqrt{42}$

11. 已知 $|e_1| = |e_2| = 1, e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2}$, 若在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{CB} = a, \overrightarrow{AC} = b$, 且 $a + b = e_1, a - 2b = e_2$, 则

A. e_1, e_2 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$

B. $a \cdot b = \frac{1}{18}$

C. 若 $(a + \lambda b) \parallel b$, 则 $\lambda = \frac{1}{2}$

D. $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中线长为 $\frac{\sqrt{7}}{6}$

12. 若实数 x, y 满足 $x^2 - y^2 - xy = 2$, 则

A. $|x| \geq 2$ B. $|x| \geq \frac{2\sqrt{10}}{5}$ C. $|x + y| \geq \frac{2\sqrt{10}}{5}$ D. $x^2 + y^2 \geq \frac{4\sqrt{5}}{5}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 $\sin \alpha = \frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha + \frac{3\pi}{2}) + \sin(\beta - \frac{3\pi}{2}) =$ _____.

14. 函数 $f(x) = 2x + \sqrt{1+x}$ 的最大值为 _____.

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 若 F 关于直线 $y = -x$ 的对称点 P 落在 C 上或 C 内, 则椭圆 C 的离心率的取值范围为 _____.

16. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 3, AA_1 = 2, P, Q$ 为 A_1D_1, D_1C_1 的中点, S 在 BC 上, 且 $BS = 1$. 过 P, Q, S 三点的平面与长方体的六个面相交得到六边形 $PQRSMN$, 则点 M 到直线 QR 的距离为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c ，且 $(a-c)^2 = b^2 - (2-\sqrt{2})ac$ 。

(1) 求角 B ；

(2) 若 $A = \frac{\pi}{3}$ ，周长 $l = \sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ ，求 b 。

18. (本小题满分 12 分)

正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_3 = \frac{7}{4}$ ，且 $a_1, \frac{5}{8}, a_3$ 成等差数列， $a_{n+1} < a_n (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

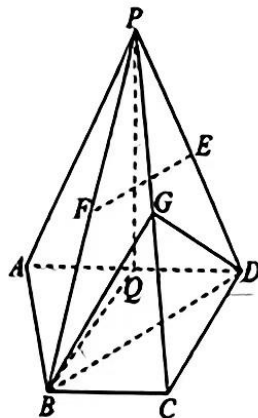
(2) 若 $b_n = \frac{\log_2 a_{n+1}}{a_{n+1}}$ ，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

19. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， E, F 分别为 PD, PB 的中点，连接 EF 。

(1) 当 G 为 PC 上不与点 P, C 重合的一点时，证明： $EF \parallel$ 平面 BGD ；

(2) 已知 G, Q 分别为 PC, AD 的中点， $\triangle PAD$ 是边长为 2 的正三角形，四边形 $BCDQ$ 是面积为 2 的矩形，当 $CD \perp PQ$ 时，求 PC 与平面 BGD 所成角的正弦值。



20. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点与抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点重合, 且离心率为 2.

(1) 求双曲线 E 的标准方程;

(2) 过点 $P(2, 0)$ 的直线与双曲线 E 交于 A, B 两点, O 为原点, 是否存在直线 l , 使 $OA \perp OB$ 成立? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

某学校组织一项竞赛, 在初赛中有两轮答题: 第一轮从 A 类的三个问题中随机选两题作答, 每答对一题得 20 分, 答错得 0 分; 第二轮从 B 类的分值分别为 20, 30, 40 的 3 个问题中随机选两题作答, 每答对一题得满分, 答错得 0 分. 若两轮总积分不低于 90 分, 则晋级复赛. 甲、乙同时参赛, 在 A 类的三个问题中, 甲每个问题答对的概率均为 $\frac{1}{2}$, 乙只能答对两个问题; 在 B 类的 3 个分值分别为 20, 30, 40 的问题中, 甲答对的概率分别为 $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$, 乙答对的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. 甲、乙回答任一问题正确与否互不影响. 设甲、乙在第一轮的得分分别为 X, Y .

(1) 分别求 X, Y 的概率分布列;

(2) 分别计算甲、乙晋级复赛的概率, 并请说明谁更容易晋级复赛?

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1), g(x) = f(x) + ae^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求过点 $(-1, -1)$ 且与函数 $f(x)$ 的图象相切的直线方程;

(2) ① 求证: 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$;

② 若函数 $g(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 求证: $|x_2 - x_1| < 2\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a}} - 1$.