

百师联盟 2021 届高三 开年摸底联考 全国卷 I  
文科数学试卷

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

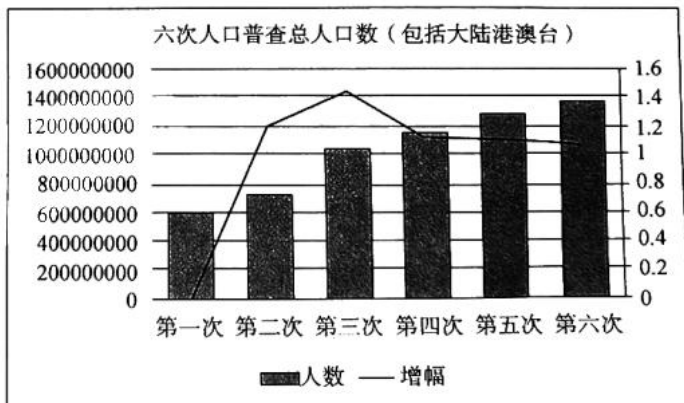
1. 已知复数  $z$  满足:  $\frac{z+1}{1+i} = i$ , 则  $|z| =$

- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $\sqrt{5}$                       C. 2                      D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 集合  $M = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\}$ ,  $N = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , 则集合  $M \cap N =$

- A.  $\{1, 2\}$                       B.  $\{1, 2, 3\}$                       C.  $\{0, 1, 2\}$                       D.  $\{-2, -1, 1, 2\}$

3. 人口普查是世界各国所广泛采用的搜集人口资料的一种科学方法,是提供全国基本人口数据的主要来源。根据人口普查的基本情况,可以科学的研究制定社会、经济、科教等各项发展政策,是国家科学决策的重要基础工作,人口普查资料是制定人口政策的依据和前提。截止 2020 年 10 月 10 日,我国共进行了六次人口普查,右图



是这六次人口普查的人数和增幅情况,下列说法正确的是

- A. 人口数逐次增加,第二次增幅最大
  - B. 第六次普查人数最多,第四次增幅最小
  - C. 第六次普查人数最多,第三次增幅最大
  - D. 人口数逐次增加,从第二次开始增幅减小
4. 在空间立体几何中,“两条直线  $a, b$  平行”是“两条直线  $a, b$  都垂直于直线  $c$ ”的
- A. 充分不必要条件
  - B. 必要不充分条件
  - C. 充要条件
  - D. 既不充分又不必要条件

5. 对任意实数  $a, b, c$ , 在以下命题中, 正确的个数有

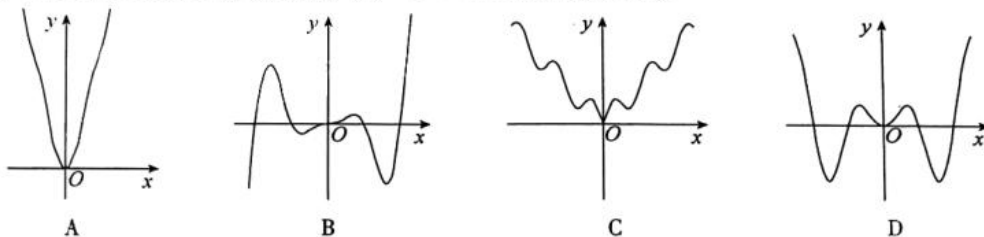
- ①若  $ac^2 < bc^2$ , 则  $a < b$ ; ②若  $a > b$ , 则  $\frac{a}{b} > 1$ ;  
③若  $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$ , 则  $a < |b|$ ; ④若  $a > 1 > b > 0$ , 则  $\log_a(a-b) = 1 - \log_a b > 0$

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 0

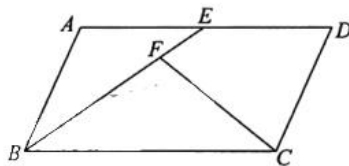
6. 数列  $\{a_n\}$  是等比数列,  $a_3 = 3, a_6 = 81$ , 则  $a_5 =$

- A. 15                      B. 16                      C. 27                      D. 25

7. 我国著名数学家华罗庚先生曾说: 数缺形时少直观, 形缺数时难入微, 数形结合百般好, 隔裂分家万事休. 在数学的学习和研究中, 常用函数的图像研究函数的性质, 也常用函数的解析式来琢磨函数的图象特征. 如函数  $f(x) = x^2 + x \sin x$  的图象大致为



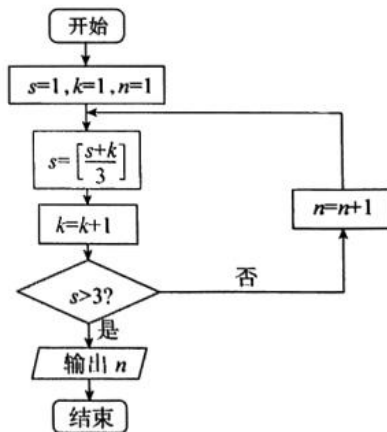
8. 如图, 平行四边形  $ABCD$  中,  $E$  是  $AD$  的中点,  $F$  在线段  $BE$  上, 且  $BF = 3FE$ , 记  $\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ , 则  $\overrightarrow{CF} =$



- A.  $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$       B.  $\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}$       C.  $-\frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{3}{8}\mathbf{b}$       D.  $\frac{3}{4}\mathbf{a} - \frac{5}{8}\mathbf{b}$

9. 执行如图所示的程序框图, 记  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 则输出的结果是

- A. 6  
B. 5, 6  
C. 9  
D. 7, 8, 9



10. 函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(1) = 0, f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数, 且  $f'(x) > 0$ , 则不等式  $(x-2)f(x) > 0$  的解集是

- A.  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$   
B.  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$   
C.  $(0, 1) \cup (2, +\infty)$   
D.  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

11. 如图,“蘑菇”形状的几何体是由半个球体和一个圆柱体组成,球的半径为 2,圆柱的底面半径为 1,高为 3,则该几何体的表面积为



A.  $18\pi$       B.  $20\pi$       C.  $22\pi$       D.  $26\pi$

12. 已知点  $A, B, C$  在双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  上,若  $A, B$  两点关于原点对称,  $AC$  过右焦点  $F$ ,且  $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, 3|AF| = |CF|$ ,则双曲线的离心率为

A.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\sqrt{5}$       D.  $1 + \sqrt{2}$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 桌子上放有 5 张学生的期中考试数学卷,有 3 张在 130 分以上,2 张在 90 分以下,老师为了准确了解学生情况,每次任取一张,不放回地取两次,若第一次取到 130 分以上的一张,则第二次取到 90 分以下的一张试卷的概率为\_\_\_\_\_.
14. 设  $M, N$  是函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$  图象与直线  $y = 2$  的交点,若  $M, N$  两点距离的最小值为 6,  $P(-\frac{1}{2}, 2)$  是该函数图象上的一个点,则  $f(x)$  的解析式是\_\_\_\_\_.
15. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,已知  $a_1 = 1, S_{n+1} = 3a_n + 2$ ,则  $a_5 =$ \_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x) = mx - \ln x - m$  在区间  $(1, e)$  内有零点,则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

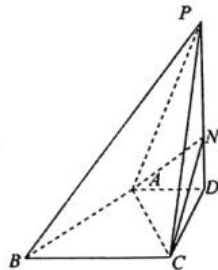
已知  $a, b, c$  是  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边,且  $5\cos B \cos C + 2 = 5\sin B \sin C + \cos 2A$ .

- (1)求角  $A$  的大小;  
(2)若  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{3}{2}\sqrt{3}, c = \sqrt{3}$ ,求  $\sin B \sin C$  的值.

18. (12 分)

在四棱锥  $P - ABCD$  中,  $PD \perp$  平面  $ABCD, PD = 1, PN = 2ND$ . 四边形  $ABCD$  为梯形,  $AD \parallel BC, BC = 2AD = 2DC = 4, \angle ADC = 120^\circ$ .

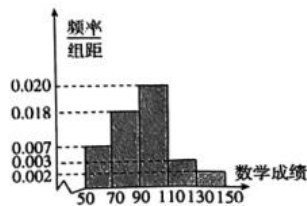
- (1)求证:  $PB \parallel$  平面  $ACN$ ;  
(2)求三棱锥  $N - PBC$  的体积.



19. (12 分)

在一次模拟考试中,某校共有 100 名文科学生参加考试,其中语文考试成绩低于 130 的占 95%,如果成绩不低于 130 的为特别优秀,数学成绩的频率分布直方图如图.

- (1)求数学成绩特别优秀的人数及数学成绩的平均分;  
(2)如果语文和数学两科都特别优秀的共有 3 人. 根据以上数据,完成  $2 \times 2$  列联表,并分析是否有 99% 的把握认为语文特别优秀的同学,



数学也特别优秀.

	语文特别优秀	语文不特别优秀	合计
数学特别优秀			
数学不特别优秀			
合计			

参考数据: ①  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ;

②

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.40	...	0.010	0.005	0.001
$k_0$	0.455	0.708	...	6.635	7.879	10.828

20. (12分)

已知函数  $f(x) = ae^x + \sin x + x, x \in [0, \pi], a < 0$

(1) 证明: 当  $a = -1$  时, 函数  $f(x)$  有唯一的极大值

(2) 若  $f(x) < 2x - 1$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

21. (12分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的上下顶点为  $A, B$ .  $P$  为直线  $y = 2$  上一动点, 当点  $P$  位于点  $(1, 2)$  时,  $\triangle ABP$  的面积  $S_{\triangle ABP} = 1$ , 椭圆  $C$  上任意一点到椭圆的左焦点  $F_1$  的最短距离为  $\sqrt{2} - 1$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 连接  $PA, PB$ , 直线  $PA, PB$  分别交椭圆于  $M, N$  两点, 证明: 直线  $MN$  过定点.

(二) 选考题: 10分. 请考生在第 22、23 题中选定一题作答, 并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑. 按所涂题号进行评分, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多答, 则按所答第一题评分.

22. 选修 4-4: 坐标系与参数方程 (10分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 直线  $l$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 3 \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

(1) 求直线  $l$  普通方程;

(2) 设  $A(2, 3)$ , 若直线  $l$  与曲线  $C$  相交于  $P, Q$  两点, 求  $|AP| + |AQ|$  的值.

23. 选修 4-5: 不等式选讲 (10分)

已知函数  $f(x) = |3x - a| + x. (a > 0)$

(1) 当  $a = 4$  时, 求不等式  $f(x) < 3$  的解集;

(2) 设函数  $g(x) = \left| x + \frac{6}{a} \right| - x$ . 当  $x \in \mathbf{R}$  时, 证明:  $f(x) + g(x) \geq 2\sqrt{2}$ .

开年摸底联考 全国卷 I 文科数学试卷 第 4 页 (共 4 页)

## 关于我们

自主选拔在线 (原自主招生在线) 创办于 2014 年, 历史可追溯至 2008 年, 隶属北京

天星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “专业、专注、有态度” 的创办公理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。

 微信搜一搜 自主选拔在线