

成都石室中学高 2023 届高考适应性考试（二）

文科数学参考答案

答案及解析

1. C 【解析】因为 $A = \{x \in \mathbf{N}^* | y = \lg(5-x)\} = \{x \in \mathbf{N}^* | 5-x > 0\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ，所以集合 A 的真子集的个数为 $2^4 - 1 = 15$ ．故选 C．

2. D 【解析】对于 A，“全等三角形的面积相等”的否命题是“不全等三角形的面积不相等”，这显然是假命题，故 A 错误；对于 B，在 $\triangle ABC$ 中， $A \in (0, \pi)$ ，由 $\sin A > \frac{1}{2}$ ，得 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{5\pi}{6}$ ，所以“ $A > \frac{\pi}{6}$ ”是“ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”的必要不充分条件，故 B 错误；对于 C，命题“ $\forall x > 1, x^3 > x^2$ ”的否定是“ $\exists x > 1, x^3 \leq x^2$ ”，故 C 错误；对于 D， $z = (1+i)(1-2i) = 1-2i+i-2i^2 = 3-i$ ，所以其对应的点为 $(3, -1)$ ，在第四象限，故 D 正确．故选 D．

3. D 【解析】设招商引资前经济收入为 M ，则招商引资后经济收入为 $2M$ ．对于 A，招商引资前工资净收入为 $M \times 60\% = 0.6M$ ，招商引资后的工资净收入为 $2M \times 37\% = 0.74M$ ，所以招商引资后，工资净收入增加了，故 A 错误；对于 B，招商引资前转移净收入为 $M \times 4\% = 0.04M$ ，招商引资后转移净收入为 $2M \times 5\% = 0.1M$ ，所以招商引资后，转移净收入是前一年的 2.5 倍，故 B 错误；对于 C，招商引资后，转移净收入与财产净收入的总和为 $0.1M + 2M \times 28\% = 0.66M < \frac{2}{5} \times 2M = 0.8M$ ，所以招商引资后，转移净收入与财产净收入的总和低于该年经济收入的 $\frac{2}{5}$ ，故 C 错误；对于 D，招商引资前经营净收入为 $M \times 30\% = 0.3M$ ，招商引资后经营净收入为 $2M \times 30\% = 0.6M$ ，所以招商引资后，经营净收入较前一年增加了一倍，故 D 正确．故选 D．

4. C 【解析】函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^m$ 为幂函数，则 $m^2 - 3m - 3 = 1$ ，解得 $m = 4$ 或 $m = -1$ ．当 $m = 4$ 时， $f(x) = x^4$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增，不满足条件，排除 A．当 $m = -1$ 时， $f(x) = x^{-1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减，满足题意．函数 $f(x) = x^{-1}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减，但不是减函数，排除 B．函数 $f(x) = x^{-1}$ 的图象关于原点对称，是奇函数．故选 C．

5. A 【解析】 $f(x) = 2 \sin \left[\left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(2x + \frac{2\pi}{3} \right)$ ，则 $2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，所以 $f(x)$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ，当 $k = 1$ 时， $x = \frac{5\pi}{12}$ ．故选 A．

6. B 【解析】对于 A，若 $m \perp \alpha$ ， $m \perp n$ ，则 $n // \alpha$ 或 $n \subset \alpha$ ，故 A 错误；对于 B，若 $m // \alpha$ ， $m // \beta$ ，

过 m 作平面与 α, β 分别交于直线 a, b , 由线面平行的性质得 $m \parallel a, m \parallel b$, 所以 $a \parallel b$, 又 $b \subset \beta, a \not\subset \beta$, 所以 $a \parallel \beta$, 又 $n \subset \alpha, \alpha \cap \beta = n$, 所以 $a \parallel n$, 所以 $m \parallel n$, 故 B 正确; 对于 C, 由面面垂直的性质定理可得, 当 $m \subset \alpha$ 时, $m \perp \beta$, 否则可能不成立, 故 C 错误; 对于 D, 若 $m \parallel n, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$ 或 $m \subset \alpha$, 故 D 错误. 故选 B.

7. A【解析】由已知, 得 $0.8 \times D^{\frac{12}{12}} = 0.5$, 所以 $D = \frac{5}{8}$, 则有 $0.8 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{G}{12}} < 0.2$, 即 $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{G}{12}} < \frac{1}{4}$, 即 $\frac{G}{12} \lg \frac{5}{8} < \lg \frac{1}{4}$,

即 $G > \frac{12 \lg \frac{1}{4}}{\lg \frac{5}{8}} = \frac{-24 \lg 2}{1 - 4 \lg 2} \approx 35.4$, 因此 G 至少为 36. 故选 A.

8. D【解析】甲、乙同学所选的科目情况有: (化学, 化学), (化学, 生物), (生物, 化学), (生物, 生物), (政治, 化学), (政治, 生物), 共 6 种; 其中甲、乙同学所选的科目不相同的情况有: (化学, 生物), (生物, 化学), (政治, 化学), (政治, 生物), 共 4 种. 因此, 所求概率 $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. 故选 D.

9. B【解析】设双曲线 C 的半焦距为 c . 如图, 由题意可得, 直线 OM 的方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 有 $\tan \angle MOA = \frac{b}{a}$,

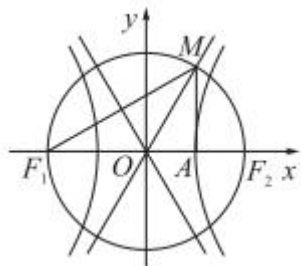
即有 $\sin \angle MOA = \frac{b}{a} \cos \angle MOA$. 又 $\sin^2 \angle MOA + \cos^2 \angle MOA = 1$, 解得 $\cos \angle MOA = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{c}$. 在

$\triangle MOA$ 中, 由余弦定理, 得 $|MA| = \sqrt{|OM|^2 + |OA|^2 - 2|OM||OA|\cos \angle MOA} = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca \cdot \frac{a}{c}} = b$, 因

此 $|MA|^2 + |OA|^2 = |OM|^2$, 即有 $\angle OAM = 90^\circ$. 又 $|MF_1| = 3|MA|$, 则 $|MF_1| = 3b$, $|F_1A| = 2\sqrt{2}b$. 又

$|F_1A| = a + c$, 于是 $a + c = 2\sqrt{2}b$, 所以 $(a + c)^2 = 8b^2$, 即 $a^2 + 2ac + c^2 = 8c^2 - 8a^2$, 化简得 $7e^2 - 2e - 9 = 0$,

即 $(e + 1)(7e - 9) = 0$, 解得 $e = -1$ (舍去) 或 $e = \frac{9}{7}$, 所以该双曲线的离心率 $e = \frac{9}{7}$. 故选 B.



10. A【解析】由 $\frac{S_n}{n} < \frac{S_{n+1}}{n+1}$, 得 $\frac{n(a_1 + a_n)}{2n} < \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2(n+1)}$, 即 $a_n < a_{n+1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为递增的等差

数列. 因为 $S_5 = S_{13}$, 所以 $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0$, 即 $a_9 + a_{10} = 0$, 则 $a_9 < 0$, $a_{10} > 0$,

所以当 $n \leq 9$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_n < 0$; 当 $n \geq 10$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_n > 0$. 因此, S_n 有最小值, 且最小值为 S_9 . 故选 A.

11. B 【解析】在图 1 中, 以 B 为原点建立平面直角坐标系 xBy 如图 2 所示, 设阿氏圆圆心为 $O(a, 0)$, 半径

为 r . 因为 $|PA| = 2|PB|$, 所以 $\frac{|PA|}{|PB|} = 2$, 所以 $r = \left| \frac{2}{1-2^2} \right| \cdot |AB| = \frac{2}{3} \times 6 = 4$. 设圆 O 与 AB 交于点 M . 由阿

氏圆性质, 知 $\frac{|MA|}{|MB|} = \lambda = 2$. 又 $|MB| = 4 - |BO| = 4 - a$, 所以 $|MA| = 2|MB| = 8 - 2a$. 又 $|MA| + |MB| = 6$,

所以 $8 - 2a + 4 - a = 6$, 解得 $a = 2$, 所以 $O(2, 0)$, 所以点 P 在空间内的轨迹为以 O 为球心, 半径为 4 的球. 当

点 P 在侧面 ABB_1A_1 内部时, 如图 2 所示, 截面圆与 AB , BB_1 分别交于点 M , R , 所以点 P 在侧面 ABB_1A_1 内

的轨迹为 $\widehat{MR}$. 因为在 $Rt\triangle RBO$ 中, $|RO| = 4$, $|BO| = 2$, 所以 $\angle ROB = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\widehat{MR} = \frac{\pi}{3} \times 4 = \frac{4\pi}{3}$, 所

以点 P 在侧面 ABB_1A_1 内部的轨迹长为 $\frac{4\pi}{3}$. 故选 B.

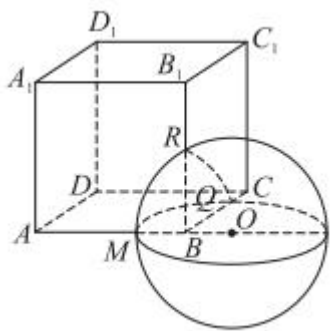


图 1

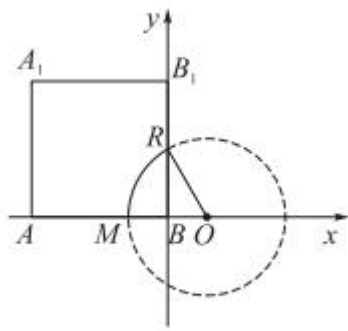


图 2

12. C 【解析】由 $\ln a$ 有意义可知, $a > 0$. 由 $(e-1)(\ln a + x) \geq ae^x - 1$, 得 $(e-1)\ln(ae^x) \geq ae^x - 1$. 令 $t = ae^x$,

即有 $(e-1)\ln t \geq t - 1$. 因为 $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 所以 $t = ae^x \in [a, a\sqrt{e}]$. 令 $f(t) = (e-1)\ln t - t + 1$, 问题转化为

当 $t \in [a, a\sqrt{e}]$, $f(t) \geq 0$ 恒成立. 因为 $f'(t) = \frac{e-1-t}{t}$, 令 $f'(t) < 0$, 即 $e-1-t < 0$, 解得 $t > e-1$; 令

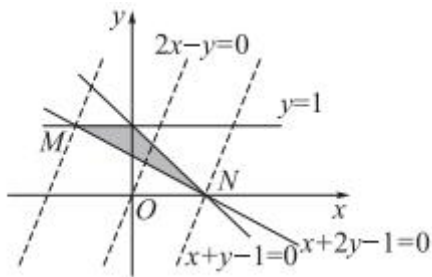
$f'(t) > 0$, 即 $e-1-t > 0$, 解得 $0 < t < e-1$, 所以 $f(t)$ 在 $(0, e-1)$ 上单调递增, 在 $(e-1, +\infty)$ 上单调递减. 又

$f(1) = 0$, $f(e) = (e-1)\ln e - e + 1 = 0$, 所以当 $1 \leq t \leq e$ 时, $f(t) \geq 0$. 因为当 $t \in [a, a\sqrt{e}]$, $f(t) \geq 0$ 恒

成立, 所以只需 $a\sqrt{e} \leq e$ 且 $a \geq 1$, 解得 $a \in [1, \sqrt{e}]$. 故选 C.

13. 2 【解析】作约束条件 $\begin{cases} y \leq 1, \\ x+y \leq 1, \\ 2y+x \geq 1 \end{cases}$ 的可行域, 如图所示. 由 $\begin{cases} x+y=1, \\ 2y+x=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 令 $N(1,0)$. 将目标

函数 $z=2x-y$ 变形为 $y=2x-z$. 根据其几何意义可得, 当直线 $y=2x-z$ 经过点 $N(1,0)$ 时, 其纵截距最小, 即目标函数 z 取到最大值, 则 $z=2x-y$ 的最大值为 2.



14. $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 设其公比为 q . 由 $a_7 = 16$,

$a_3 a_5 = a_4^2 = 4$, 得 $a_4 = \pm 2$, $q^3 = \frac{a_7}{a_4} = \pm 8$, 所以 $q = \pm 2$. 当 $q = 2$ 时, $a_4 = 2$, 则 $a_2 = \frac{1}{2}$; 当 $q = -2$ 时,

$a_4 = -2$, 则 $a_2 = -\frac{1}{2}$. 综上, a_2 的值为 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$.

15. $\left(e-4, \frac{e^2}{4}\right) \cup \{e\}$ 【解析】当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = -x^3 - 3x^2 + e$, $f'(x) = -3x(x+2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$

上单调递减, 在 $(-2, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 且 $f(-2) = f(1) = -4 + e$, $f(0) = e$; 当 $x > 1$ 时,

$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $f'(x) = \frac{x-2}{x^3} e^x$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 且当 $x \rightarrow 1$ 时,

$f(x) \rightarrow e$, $f(2) = \frac{e^2}{4}$. 作出函数 $f(x)$ 的示意图 (略) 可知, $g(x) = f(x) - m$ 有且只有三个零点, 需满

足 $m \in \left(e-4, \frac{e^2}{4}\right) \cup \{e\}$.

16. $\frac{2}{3}$ 【解析】设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 以 A, B 为切点的抛物线的切线斜率为 k_A, k_B . 由 $y = x^2$, 得 $y' = 2x$,

故 $k_A = 2x_1$, $k_B = 2x_2$, 所以切线 PA 的方程为 $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$, 即 $x_1^2 - 2x_1x + y = 0$. 同理可得, 切线

PB 的方程为 $x_2^2 - 2x_2x + y = 0$. 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) , 所以 $x_1^2 - 2x_1x_0 + y_0 = 0$, $x_2^2 - 2x_2x_0 + y_0 = 0$,

所以 x_1, x_2 为方程 $x^2 - 2x_0x + y_0 = 0$ 的两根, 故 $x_1 + x_2 = 2x_0$, $x_1x_2 = y_0$, 则

$$k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 = 2x_0 = \frac{2}{3}.$$

17. 解: (I) 由表格数据, 得 $\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6+7+8}{7} = 5$, $\bar{y} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 y_i = \frac{405}{7}$,

$$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 28. \text{ 由公式, 得}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i y_i - 7\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2} = \frac{2305 - 7 \times 5 \times \frac{405}{7}}{28} = 10, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = \frac{405}{7} - 10 \times 5 = \frac{55}{7}, \text{ 故 } y \text{ 关于 } x \text{ 的线性回归方程}$$

$$\text{为 } \hat{y} = 10x + \frac{55}{7}.$$

(II) 由 (I) 可得, $z = 2\sqrt{10x + \frac{55}{7}} - x$. 设 $\sqrt{10x + \frac{55}{7}} = t$, 则 $x = \frac{1}{10}t^2 - \frac{11}{14}$, 所以

$$z = 2t - \left(\frac{1}{10}t^2 - \frac{11}{14} \right) = -\frac{1}{10}t^2 + 2t + \frac{11}{14}, \text{ 故当 } t = 10 \text{ 时, } z \text{ 取得最大值, 此时 } x = 10 - \frac{11}{14} \approx 9.2, \text{ 即年广告}$$

费 x 约为 9.2 万元时, 年利润的预报值最大.

18. 解: (I) 因为 $\sqrt{3}b \sin \frac{B+C}{2} = a \sin B$, 所以 $\sqrt{3}b \sin \frac{\pi-A}{2} = a \sin B$, 即 $\sqrt{3}b \cos \frac{A}{2} = a \sin B$. 由正弦定理, 得 $\sqrt{3} \sin B \cdot \cos \frac{A}{2} = \sin A \cdot \sin B$. 因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\sqrt{3} \cos \frac{A}{2} = \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$. 因为

$$\cos \frac{A}{2} \neq 0, \text{ 所以 } \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 又因为 } 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \frac{A}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } A = \frac{2\pi}{3}.$$

(II) 因为 D 为边 BC 中点, 所以 $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 则 $4|\overrightarrow{AD}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2$. 又 $AD = \sqrt{3}$, $A = \frac{2\pi}{3}$,

$$\text{所以 } 12 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos \frac{2\pi}{3}, \text{ 即 } 12 = b^2 + c^2 - bc \geq bc, \text{ 当且仅当 } b = c \text{ 时取等号, 所以}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq 3\sqrt{3}, \text{ 所以 } \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } 3\sqrt{3}.$$

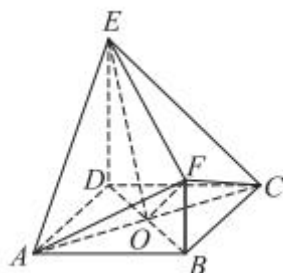
19. (I) 证明: 因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AC \perp BD$. 因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $ED \perp AC$. 又 $ED \cap BD = D$, $ED, BD \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp$ 平面 $BDEF$. 又 $AC \subset$ 平面 AFC , 所以平面 $BDEF \perp$ 平面 AFC .

(II) 解: 如图, 设 BD 交 AC 于点 O , 连接 OE, OF . 由 (I) 可知, $AC \perp$ 平面 $BDEF$, $OF \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp OF$. 设 $BF = 1$, 则 $OB = OD = 1$, $DE = 2$, 所以

$$S_{\triangle BDF} = S_{\text{四边形}BDEF} - S_{\triangle BOF} - S_{\triangle DOE} = \frac{(1+2) \times 2}{2} - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = \frac{3}{2}, \text{ 所以}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle EDF} \cdot AC = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} AC = \frac{1}{2} AC. \text{ 由 (I) 可知, } BF \perp \text{平面 } ABCD, \text{ 所以}$$

$$V_2 = V_{A-BFC} = V_{F-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot BF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AC \cdot OB \cdot BF = \frac{1}{6} AC, \text{ 所以 } \frac{V_1}{V_2} = 3.$$



20. (I) 解: $f(x) = \ln x - a\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$. 注意到 $f(1) = 0$, 所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$

的极小值点, 则 $f'(1) = 0$, 所以 $f'(1) = \frac{1-a}{1} = 0$, 得 $a=1$. 当 $a=1$ 时, $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$

上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) \geq f(1) = 0$, 满足条件, 故 $a=1$.

(II) 证明: 由 (I) 可得, $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x} (x \geq 1)$. 令 $\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{k}{k-1}$, 所以 $\ln \frac{k}{k-1} > \frac{1}{k}$, 即

$$\frac{1}{k} < \ln k - \ln(k-1), \quad k \in \{2, 3, \dots, n\}, \text{ 所以}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < [\ln 2 - \ln 1] + [\ln 3 - \ln 2] + \dots + [\ln n - \ln(n-1)] = \ln n. \text{ 证毕.}$$

21. (I) 解: 由题意, 得 $\frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{1}{4} (|x| \neq 2)$, 化简得 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (|x| \neq 2)$, 所以曲线 C 为中心在坐

标原点, 焦点在 x 轴上的椭圆, 不含左、右顶点.

(II) ①证明: $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. 因为若直线 PQ 的斜率为 0, 则点 P, Q 关于 y 轴对称, 必有 $k_{BP} \cdot k_{BQ} > 0$,

不合题意, 所以直线 PQ 的斜率必不为 0. 设直线 PQ 的方程为 $x = ty + n (n \neq \pm 2)$. 由 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ x = ty + n, \end{cases}$ 得

$$(t^2 + 4)y^2 + 2tny + n^2 - 4 = 0, \text{ 所以 } \Delta = 4t^2n^2 - 4(t^2 + 4)(n^2 - 4) > 0, \text{ 且 } \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{2tn}{t^2 + 4}, \\ y_1y_2 = \frac{n^2 - 4}{t^2 + 4} \end{cases}. \text{ 因为}$$

$$k_{BP} \cdot k_{BQ} = -\frac{1}{28}, \text{ 即 } 28k_{BP} \cdot k_{BQ} = -1. \text{ 因为}$$

$$28k_{BP} \cdot k_{BQ} = \frac{28y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)} = \frac{28y_1y_2}{(ty_1+n-2)(ty_2+n-2)} = \frac{28y_1y_2}{t^2y_1y_2+t(n-2)(y_1+y_2)+(n-2)^2}$$

$$= \frac{\frac{28(n^2-4)}{t^2+4}}{\frac{t^2(n^2-4)}{t^2+4} - \frac{2t^2n(n-2)}{t^2+4} + (n-2)^2} = \frac{28(n+2)}{t^2(n+2) - 2t^2n + (n-2)(t^2+4)} = \frac{28(n+2)}{4(n-2)} = \frac{7n+14}{n-2} = -1, \text{ 所}$$

以 $n = -\frac{3}{2}$, 此时 $\Delta = 16(t^2 + 4 - n^2) = 4(4t^2 + 7) > 0$, 故直线 PQ 恒过 x 轴上一定点 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

②解: 由①可得, $y_1 + y_2 = \frac{3t}{t^2 + 4}$, $y_1y_2 = -\frac{7}{4(t^2 + 4)}$, 所以

$$S = \frac{1}{2} \cdot |y_1 - y_2| \cdot \left| 2 - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| = \frac{7}{4} |y_1 - y_2| = \frac{7}{4} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{\sqrt{4t^2 + 7}}{t^2 + 4}$$

$$= \frac{7}{2} \sqrt{\frac{4(t^2 + 4) - 9}{(t^2 + 4)^2}} = \frac{7}{2} \sqrt{\frac{4}{t^2 + 4} - \frac{9}{(t^2 + 4)^2}} = \frac{7}{2} \sqrt{-9\left(\frac{1}{t^2 + 4} - \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{4}{9}} \leq \frac{7}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3}, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{t^2 + 4} = \frac{2}{9} \text{ 即}$$

$t^2 = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 所以 S 的最大值为 $\frac{7}{3}$.

22. 解: (I) 当 $k=1$ 时, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 \sin t \cos t, \\ y = \cos t - \sin t \end{cases}$ (t 为参数). 因为

$y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t - 2 \cos t \sin t = 1 - \frac{1}{2}x$, 且 $x = 2 \sin 2t \in [-2, 2]$, 所以曲线 C_1 的直角坐标方程为

$$y^2 = 1 - \frac{1}{2}x \quad (-2 \leq x \leq 2).$$

(II) 当 $k=4$ 时, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 \sin t \cos t, \\ y = \cos^4 t - \sin^4 t \end{cases}$ (t 为参数). 因为

$y = (\cos^2 t + \sin^2 t)(\cos^2 t - \sin^2 t) = \cos 2t$, $x = 2 \sin 2t$, 所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. 设

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). 将直线 l 的参数方程代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 得 $5t^2 - 2\sqrt{2}t - 6 = 0$. 设

点 A, B, M 对应的参数分别为 t_1, t_2, t_M . 由韦达定理, 得 $t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. 又线段 AB 的中点为 M , 所以

$$t_M = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{5}, \text{ 所以 } |PM| = |t_M| = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

23. (I) 解: 当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 2$, 所以 $f(x) = x^2 - 2x + 2 \geq 2$, 解得 $x \leq 0$; 当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) = -x^2 + 4x - 2$, 所以 $f(x) = -x^2 + 4x - 2 \geq 2$ 的解集为 $\emptyset$; 当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 2$, 所以 $f(x) = x^2 - 2x + 2 \geq 2$, 解得 $x \geq 2$. 综上, $f(x) \geq 2$ 的解集为 $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

$$(II) \text{ 证明: 由 (I) 可知, } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 < x < 2, \\ x^2 - 2x + 2, & x \geq 2. \end{cases} \text{ 当 } x=1 \text{ 时, } m = f(x) = 1, \text{ 所以}$$

$a + b + c = 6m = 6$. 由柯西不等式可得,

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+2})^2 = (\sqrt{a} \times 1 + \sqrt{b+1} \times 1 + \sqrt{c+2} \times 1)^2 \leq (a + b + 1 + c + 2) \times (1 + 1 + 1) = 27, \text{ 所以}$$

$\sqrt{a} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+2} \leq 3\sqrt{3}$, 当且仅当 $a=3, b=2, c=1$ 时等号成立, 原命题得证