

## 大庆市高三年级第二次教学质量检测试题

### 数学试题参考答案及评分细则

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| A | B | D | C | C | D | A | B |

1. A. 【解析】因为  $A = \{x | x > 1\}$ ， $B = \{x | 1 \leq x < 2\}$ ，所以  $A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$ 。

2. B. 【解析】因为  $z_1 \cdot z_2 = 3m + 8 + (6 - 4m)i$ ，所以  $m = \frac{3}{2}$ 。

3. D. 【解析】②中  $l, m$  可能是异面直线、相交直线、平行直线；③中  $l, m$  可能是异面直线、平行直线。

4. C. 【解析】由题意可知圆内接正  $n$  边形的周长为  $d = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$ ，所以  $a_n = n \sin \frac{\pi}{n}$ 。

当  $n = 4$  时， $a_4 = 2\sqrt{2}$ ，故 A 正确；

令  $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ ， $f'(x) = \sin \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x} = \cos \frac{\pi}{x} (\tan \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x})$ ，由  $\tan \theta > \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

可知，当  $x > 3$  时， $\tan \frac{\pi}{x} > \frac{\pi}{x}$ ，即  $f'(x) > 0$ ，故 B 正确；

由  $\sin \theta < \theta (\theta > 0)$  可知  $x \sin \frac{\pi}{x} < \pi$ ，而  $2\sqrt{3} > \pi$ ，故 C 错误；

当  $3n_0 - 1 = 2n_0 + 3$  时， $n_0 = 4$ ，故 D 正确。

5. C. 【解析】双曲线渐近线方程为  $y = \pm \sqrt{2}x$ ，右顶点  $P$  的坐标为  $(\sqrt{2}, 0)$ ，

可求  $A(\sqrt{2}, 2), B(\sqrt{2}, -2)$ ，所以  $|PA| \cdot |PB| = 2 \times 2 = 4$ 。

6. D. 【解析】 $f(x) = 1 - \frac{2}{4^x + 2}$ ，函数  $f(x)$  在  $R$  上单调递增，故 A 错误；

$f(x) = 1 - \frac{2}{4^x + 2} = 0$  得  $4^x = 0$ ，方程无解，所以函数  $f(x)$  无零点，故 B 错误；

法一： $f(-x) = \frac{1}{2 \cdot 4^x + 1} \neq f(x)$ ，法二：代特值  $f(-1) \neq f(1)$ ，故 C 错误；

因  $f(1-x) = \frac{4^{1-x}}{2 + 4^{1-x}} = \frac{4}{2 \cdot 4^x + 4} = \frac{2}{4^x + 2}$ ，故  $f(1-x) + f(x) = 1$ ，所以函数  $f(x)$  关于点

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  对称，故 D 正确。

7. A. 【解析】由题意可知,  $FM = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $FN = NA = 1$ , 可求  $MN = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $NB = 2$ ,  $MB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ,

所以  $MN^2 + NB^2 = MB^2$ , 所以  $MN \perp NB$ ,

又  $BC \perp$  平面  $ABEF$ , 所以  $MC$  为外接球直径,

在  $Rt\triangle MBC$  中  $MC = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ , 即  $R = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ , 故外接球表面积为  $S = 4\pi R^2 = \frac{25\pi}{3}$ .

8. B. 【解析】因  $f^{(1)}(x) = f(x)$ ,  $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$ , ( $n \geq 2$ , 且  $n \in N^*$ ),  $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ ,

可知  $f^{(1)}(x) = f^{(4)}(x)$ ,  $f^{(2)}(x) = f^{(5)}(x)$ ,  $f^{(3)}(x) = f^{(6)}(x)$ ,

所以函数是以 3 为周期的迭代函数, 所以  $f^{(2023)}(2022) = f^{(1)}(2022) = \frac{2019}{2023}$ .

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

| 9   | 10  | 11  | 12    |
|-----|-----|-----|-------|
| C D | A C | A C | B C D |

9. C D. 【解析】当  $c=0$  时,  $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$ , 故 A 错误;

当  $a=2\pi, b=\frac{\pi}{2}$  时,  $\sin a < \sin b$ , 故 B 错误;

法一:  $a-b > 0 > \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ , 法二:  $a-b - (\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = (a-b)(1 + \frac{1}{ab}) > 0$ , 故 C 正确;

$e^a > a > b > \ln b$ , 故 D 正确.

10. A C. 【解析】由图可知  $A=2, T=2\pi$ , 故  $\omega=1$ , 故 A 正确;

由  $f(\frac{7\pi}{6}) = -2$  可知,  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , 即  $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$ ,  $-\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$ ,

故 B 错误;

因为  $f(x)$  的单调递减区间为  $[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}] (k \in Z)$ ,

$[-\pi, -\frac{5\pi}{6}] \subseteq [-\frac{13\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}]$ , 故 C 正确;

$y = 2\cos x$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位后得到  $y = 2\sin(x + \frac{2\pi}{3})$ , 故 D 错误.

11. A C. 【解析】 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$  平方得  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , 所以  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 故 A 正确;

因为  $\vec{a} - 2\vec{b}$  与  $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$  是共线向量, 所以  $\vec{a} - 2\vec{b}$  与  $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$  不能作为基底, 故 B 错误;

$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = (\vec{OA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{AC}) = \vec{OA}^2 + \vec{OA} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$$= \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}, \text{ 故 } C \text{ 正确};$$

$$\text{因为 } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}, \text{ 所以 } \vec{c} \text{ 与 } \vec{a} + \vec{b} \text{ 同向时, } |\vec{c}|_{\max} = 2 + \sqrt{2},$$

$$\vec{c} \text{ 与 } \vec{a} + \vec{b} \text{ 反向时, } |\vec{c}|_{\min} = 2 - \sqrt{2}, \text{ 故 } D \text{ 错误.}$$

12.  $BCD$ . 【解析】因为  $C: x^2 = 2y$ , 所以  $y' = x$ ,

$$\text{设点 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } y_0 = \frac{1}{2}x_0^2, \quad k = x_0,$$

$$\text{所以切线 } l \text{ 的方程为 } y = x_0x - \frac{1}{2}x_0^2,$$

当  $x_0 = 1$  时, 切线方程为  $2x - 2y - 1 = 0$ , 故  $A$  错误;

$$\text{由题意 } F(0, \frac{1}{2}), \quad M(x_0, -\frac{1}{2}), \quad T(0, -\frac{1}{2}x_0^2),$$

$$\text{所以 } PM = FT = \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2},$$

因为  $PM \parallel FT$ , 所以四边形  $PFTM$  为平行四边形,

又  $PF = PM$ , 所以四边形  $PFTM$  为菱形, 可得  $FM$  平分角  $\angle PFT$ , 故  $B$  正确;

$$\text{因为 } N(0, y_0), \quad T(0, -y_0),$$

$$\text{所以 } |PT|^2 = x_0^2 + 4y_0^2 = 2y_0 + 4y_0^2,$$

$$4|FP| \cdot |ON| = 4|PM| \cdot |ON| = 4\left(y_0 + \frac{1}{2}\right) \cdot y_0 = 2y_0 + 4y_0^2,$$

$$\text{所以 } |PT|^2 = 4|FP| \cdot |ON|, \text{ 故 } C \text{ 正确};$$

$$\text{直线 } GP \text{ 方程: } y = -\frac{1}{x_0}x + y_0 + 1, \text{ 可得 } G(0, 1 + y_0), \text{ 所以 } |GF| = \frac{1}{2} + y_0,$$

$$\text{又 } |PM| = y_0 + \frac{1}{2}, \text{ 所以 } GF \parallel MP,$$

所以四边形  $GFMP$  为平行四边形, 故  $PG = FM$ .

$$\text{法二: } |PG| \cdot |FM| + |GF| \cdot |PM| = |PG|^2 + |GF|^2 = \frac{|PF|^2 + |GM|^2}{2},$$

$$\text{因为 } PG \text{ 与 } GF \text{ 不垂直, 所以 } |PF| \neq |GM|, \text{ 所以 } \frac{|PF|^2 + |GM|^2}{2} > |PF| \cdot |GM|,$$

即  $|PF| \cdot |GM| < |PG| \cdot |FM| + |GF| \cdot |PM|$  成立,

法二:  $|PF| \cdot |GM| < |PG| \cdot |FM| + |GF| \cdot |PM|$

$$\Leftrightarrow |PF| \cdot |GM| < |PG|^2 + |GF|^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_0^2 + (y_0 - \frac{1}{2})^2} \cdot \sqrt{x_0^2 + (y_0 + \frac{3}{2})^2} < x_0^2 + 1 + (y_0 + \frac{1}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y_0^2 + y_0 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{y_0^2 + 5y_0 + \frac{9}{4}} < y_0^2 + 3y_0 + \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(y_0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{y_0^2 + 5y_0 + \frac{9}{4}} < y_0^2 + 3y_0 + \frac{5}{4}$$

令  $y_0 + \frac{1}{2} = t$ , 则  $t \geq \frac{1}{2}$ ,

$$\text{上式} \Leftrightarrow t \cdot \sqrt{t^2 + 4t} < t^2 + 2t \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 4t} < t + 2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4t < t^2 + 4t + 4 \Leftrightarrow 0 < 4, \text{ 故 } D \text{ 正确.}$$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.  $\frac{1}{2}$  【解析】由两直线平行可知  $\frac{m-2}{-1-m} = 1$ , 解得  $m = \frac{1}{2}$ .

14. 4 【解析】由  $3S_7 = 7(a_3 + a_5 + a_k)$  可知,

$$7a_1 + 21d = \frac{7}{3}(3a_1 + kd + 5d) = 7a_1 + \frac{7}{3}(5+k)d, \text{ 又 } d \neq 0, \text{ 所以 } k = 4.$$

15. 4 【解析】法一: 取  $AC$  中点  $F$ , 过点  $B$  作  $BE \perp AC$ , 垂足为  $E$ , 连接  $PE, PF$

易证  $BE \perp$  平面  $AA_1C_1C$ , 所以  $BE \perp EP$ , 得  $BP = \sqrt{BE^2 + EP^2}$ ,

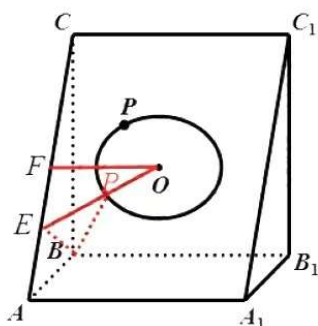
当  $P \in OE$  时  $EP$  最小, 此时  $BP$  有最小值.

易求  $BE = 2\sqrt{3}$ , 所以  $AE = 2$ ,

因为  $AC = 8$ , 所以  $EF = 2$ ,

由  $OF \perp EF$ ,  $OF = \frac{1}{2}AA_1 = 2\sqrt{3}$  得  $OE = 4$ ,

所以  $EP_{\min} = OE - 2 = 2$ , 所以  $BP$  的最小值为 4.



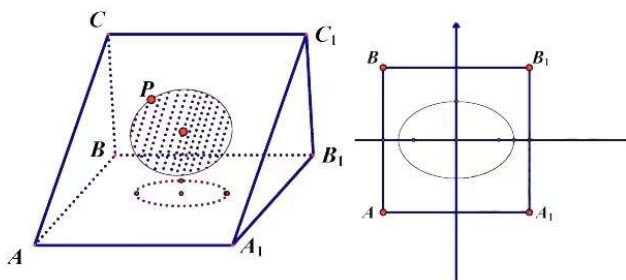
法二：由题意可知，侧面上的圆在平面  $AA_1B_1B$  上的投影是椭圆，该椭圆以  $AB_1$  与  $A_1B$  的交点为中心，长轴长为 4，短轴长为 2，焦点落在线段  $AB, A_1B_1$  的中点连线上，建立如下图的

平面直角坐标系，可知  $B(-2\sqrt{3}, 2), B_1(2\sqrt{3}, 2), A(-2\sqrt{3}, -2), A_1(2\sqrt{3}, -2)$ ，椭圆方程为

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，设  $P$  在平面  $AA_1B_1B$  上的投影点是  $P'(x, y)$ ，因为  $|BP|^2 = |BP'|^2 + |PP'|^2$ ，其

中  $|BP'|^2 = (x + 2\sqrt{3})^2 + (y - 2)^2$ ，由相似可得  $|PP'|^2 = 3(y + 2)^2$ ，故  $|BP|^2 = (x + 2\sqrt{3})^2 + (y - 2)^2 + 3(y + 2)^2 = x^2 + 4\sqrt{3}x + 28 + 4y^2 + 8y = 4\sqrt{3}x + 8y + 32$ ，令  $x = 2\cos\theta$

， $y = \sin\theta$ ，故  $|BP| = \sqrt{32 + 16\sin(\theta + \frac{\pi}{3})}$ ，所以  $|BP| \geq 4$ ，



16.  $\{m | m \leq -1 \text{ 或 } m = 2\}$  【解析】由题意可知， $x = 0$  是方程的一个根。

又函数  $y = f(x) - x\cos(\pi x)$  为奇函数，所以当  $x > 0$  时， $f(x) - x\cos(\pi x) = 0$  有一个根，

即  $\frac{\ln ex}{x} - m - \cos \pi x = 0$  有一个根。

令  $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x} - m$ ， $g(x) = \cos \pi x$ ，则  $h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ ，

因为当  $x \in (0, 1)$  时， $h'(x) > 0$ ，所以  $y = h(x)$  单调递增，

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ , 所以  $y = h(x)$  单调递减,

所以当  $x = 1$  时  $y = h(x)$  有最大值 1,

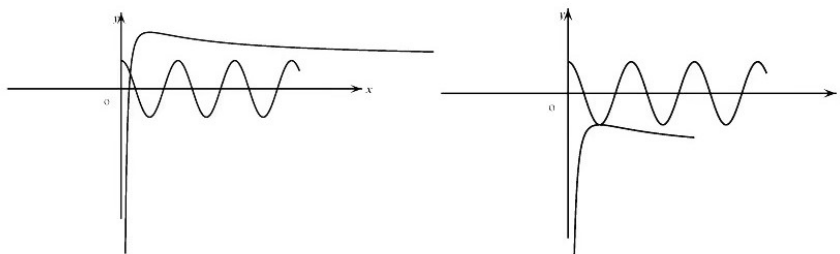
而  $g(x) = \cos \pi x$  周期为 2, 且  $g(x)$  在  $x \in (0, 1)$  单调递减,  $x \in (1, 2)$  单调递增,

所以当将函数  $y = \frac{\ln x + 1}{x}$  的图像向下平移 2 个单位, 即  $h(1) = g(1)$  时符合题意, 此时  $m = 2$ ;

又  $0 < y = \frac{\ln x + 1}{x} \leq 1$ ,  $\cos \pi x \leq 1$ , 所以将函数  $y = \frac{\ln x + 1}{x}$  的图像向上平移至少一个单位,

也符合题意, 此时  $m \leq -1$ .

所以实数  $m$  的取值范围为  $\{m \mid m \leq -1 \text{ 或 } m = 2\}$ .



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) (1) 因为  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 所以  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , -----1 分

所以  $-\sin 2x - 1 + 2 \cos^2 x = 0$ , 即  $-\sin 2x + \cos 2x = 0$ ,

所以  $\tan 2x = 1$ , -----3 分

因为  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 所以  $2x \in [0, \pi]$ , 所以  $2x = \frac{\pi}{4}$ , 即  $x = \frac{\pi}{8}$ . -----5 分

(2) 由 (1) 知  $f(x) = -\sin 2x + \cos 2x = -\sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ , -----7 分

因为  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 所以  $2x - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ , -----8 分

所以当  $2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$  即  $x = 0$  时, 函数  $f(x)$  有最大值 1. -----10 分

18. (12 分) (1) 由题意可知:  $a_2 = a_1 + d$ ,  $a_3 = a_1 + 2d$ ,

因为  $a_1$ ,  $a_2 - 1$ ,  $a_3 - 1$  成等比数列, 所以  $(a_2 - 1)^2 = a_1(a_3 - 1)$ , -----1 分

因为  $a_1 = 1$ ，所以  $d^2 = 2d$ ，-----2 分

若  $d = 0$ ，则  $a_2 - 1 = 0$ ，与  $a_1, a_2 - 1, a_3 - 1$  成等比数列矛盾，所以  $d \neq 0$ ，-----3 分

所以  $d = 2$ ，所以  $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$  -----4 分

(2) 因为  $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2-1}{a_1} = 2$ ， $b_1 = a_1 = 1$ ，

所以等比数列  $\{b_n\}$  的首项为 1，公比为 2，所以  $b_n = 2^{n-1}$ ，-----6 分

因为  $c_n = \log_2 \frac{a_n b_n}{a_{n+1}} = \log_2 \frac{(2n-1) \cdot 2^{n-1}}{2n+1} = \log_2 (2n-1) - \log_2 (2n+1) + n-1$ ，-----8 分

所以  $T_n = \log_2 1 - \log_2 3 + \log_2 3 - \log_2 5 + \cdots + \log_2 (2n-1) - \log_2 (2n+1)$   
 $+ 1 + 2 + \cdots + n-1$  -----10 分

故  $T_n = \frac{n(n-1)}{2} - \log_2 (2n+1)$ 。-----12 分

19. (12 分) 选①，由  $2S = \sqrt{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  可得  $cb \sin A = \sqrt{3} cb \cos A$ ，-----1 分

可得  $\tan A = \sqrt{3}$ ，-----2 分

因为  $A \in (0, \pi)$ ，

所以  $A = \frac{\pi}{3}$ ；-----4 分

选②，由  $2 \cos^2 \frac{B+C}{2} = 1 + \cos 2A$  可得  $1 + \cos(B+C) = 1 + \cos 2A$  -----2 分

所以  $\cos(\pi - A) = 2 \cos^2 A - 1$ ，即  $2 \cos^2 A + \cos A - 1 = 0$ ，

因为  $0 < A < \pi$ ，所以  $-1 < \cos A < 1$ ，故  $\cos A = \frac{1}{2}$ ，所以  $A = \frac{\pi}{3}$ ；-----4 分

选③，由  $c = \sqrt{3} a \sin C - c \cos A$  及正弦定理可得  $\sin C = \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin C \cos A$ ，-----1 分

因为  $C \in (0, \pi)$ ，所以  $\sin C > 0$ ，所以  $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 2 \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ ，即  $\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ，-----3 分

因为  $0 < A < \pi$ ，所以  $-\frac{\pi}{6} < A - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$ ，所以  $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ ，得  $A = \frac{\pi}{3}$ 。-----4 分

(2) 因为  $b+c = \sqrt{3}$ ，所以  $0 < b < \sqrt{3}$ ，-----5 分

因为  $D$  是  $BC$  的中点, 所以  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ , -----6 分

$$\text{平方得 } 4\overrightarrow{AD}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC},$$

$$\text{所以 } 4AD^2 = c^2 + b^2 + 2bc \cos \frac{\pi}{3} = c^2 + b^2 + bc = (b+c)^2 - bc \quad \text{-----8 分}$$

$$= 3 - b(3-b) = b^2 - \sqrt{3}b + 3 = \left(b - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \quad \text{-----9 分}$$

因为  $0 < b < \sqrt{3}$ , 所以  $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$  时,  $4\overrightarrow{AD}^2 = \frac{9}{4}$ ,  $|\overrightarrow{AD}| = \frac{3}{4}$ ,  $\frac{9}{4} \leq 4\overrightarrow{AD}^2 < 3$ ,  
-----10 分

$\frac{3}{4} \leq AD < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 故线段  $AD$  长的取值范围为  $\left[\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .  
-----12 分

20. (12 分) 如图, 延长  $FO$  至点  $M$ , 使  $FO = OM$ , 连接  $MD$ ,

因为底面  $ABCD$  的中心为  $O$ , 所以  $PO \perp$  平面  $ABCD$ , 所以  $PO \perp BD$ ,

因为  $BO = OD$ ,  $\angle FOB = \angle DOM$ ,

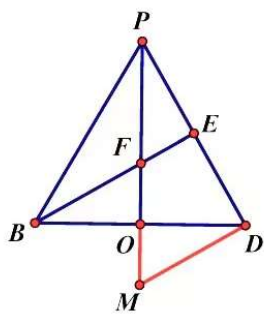
所以  $\triangle FOB \cong \triangle DOM$ , -----2 分

所以  $\angle FBO = \angle MDO$ , 所以  $FB \parallel DM$ , 即  $EF \parallel DM$

$$\text{所以 } \frac{PF}{FM} = \frac{PE}{ED},$$

而  $PF = 2FO = FM$ , 所以  $PE = ED$ , 所以  $EO \parallel PB$ ,

因为  $PB \subset$  平面  $PBC$ ,  $EO \not\subset$  平面  $PBC$ , 所以  $EO \parallel$  平面  $PBC$  -----4 分



(2) 由 (1) 知  $E$  为  $PD$  中点, 又  $BE \perp PD$ , 所以  $BP = BD$ , -----5 分

不妨设  $AB = 1$ , 则  $PB = BD = \sqrt{2}$ ,  $PO = \frac{\sqrt{6}}{2}$  -----6 分

因为  $P-ABCD$  是正四棱锥,  $O$  为底面中心, 所以  $OC, OD, OP$  两两垂直,

以  $O$  为坐标原点, 分别以  $OC, OD, OP$  方向为  $x, y, z$  轴建立如图所示的空间直角坐标系

$$\text{则 } P(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}), A(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), B(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0), C(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BP} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}), \overrightarrow{AP} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}), \overrightarrow{CP} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}) \text{ -----8 分}$$

设  $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ 、 $\vec{n}_2 = (a, b, c)$  分别平面  $PAB$ 、平面  $PBC$  的一个法向量

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{6}}{2}z = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{2}z = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \vec{n}_1 = (1, 1, -\frac{\sqrt{3}}{3}),$$

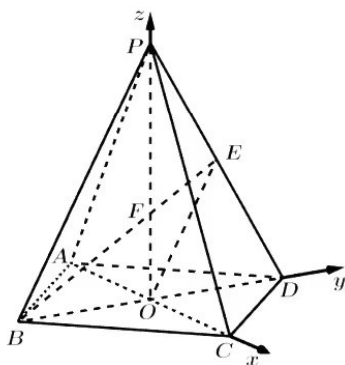
$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \overrightarrow{CP} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{6}}{2}c = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{6}}{2}c = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \vec{n}_2 = (1, -1, \frac{\sqrt{3}}{3}),$$

-----10 分

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = -\frac{1}{7},$$

$$\text{所以二面角 } A-PB-C \text{ 的余弦值为 } \frac{1}{7}.$$

-----12 分



$$21. (12 \text{ 分}) (1) \text{ 由题意可知, } \begin{cases} b = \sqrt{3} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ -----1 分}$$

解得  $a^2 = 4, b^2 = 3$ , -----2 分

所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . -----1 分

(2)  $\lambda + \mu$  是定值  $\frac{24}{5}$ .

①当直线  $l$  的斜率不存在时,  $A(1, \frac{3}{2}), B(1, -\frac{3}{2}), Q(1, -\frac{3}{4})$ ,

所以  $\overrightarrow{AQ} = (0, -\frac{9}{4}), \overrightarrow{AP} = (0, -\frac{1}{2}), \overrightarrow{QB} = (0, -\frac{3}{4}), \overrightarrow{PB} = (0, -\frac{5}{2})$ ,

所以  $\overrightarrow{AQ} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{QB} = \frac{3}{10}\overrightarrow{PB}$ , 所以  $\lambda + \mu = \frac{9}{2} + \frac{3}{10} = \frac{24}{5}$  -----6 分

②当直线  $l$  的斜率存在时, 设斜率为  $k$ , 则直线  $l$  的方程为  $y = k(x-1)+1$ ,

由  $\begin{cases} y = k(x-1)+1 \\ y = -\frac{3}{4}x \end{cases}$  得  $Q(\frac{4k-4}{4k+3}, \frac{3-3k}{4k+3})$ ,

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

由  $\begin{cases} y = kx+1-k \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$  可得  $(4k^2+3)x^2+(8k-8k^2)x+4k^2-8k-8=0$ ,

所以  $x_1+x_2 = \frac{8k^2-8k}{4k^2+3}, x_1x_2 = \frac{4k^2-8k-8}{4k^2+3}$ , -----8 分

因为  $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{QB} = \mu \overrightarrow{PB}$ , 所以  $\lambda = \frac{x_Q-x_1}{1-x_1}, \mu = \frac{x_Q-x_2}{1-x_2}$ ,

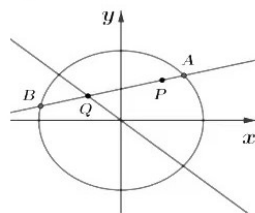
-----10 分

所以  $\lambda + \mu = \frac{x_Q(2-x_1-x_2)-(x_1+x_2)+2x_1x_2}{1-(x_1+x_2)+x_1x_2}$

$= \frac{x_Q(6+8k)-8k-16}{-5} = \frac{2(4k-4)-8k-16}{-5} = \frac{24}{5}$ . -----12 分

22. (12 分) 证明: (1) 因为  $f(x) = e^x - \frac{3+2x}{3-x} = \frac{e^x(3-x)-(3+2x)}{3-x}$ ,

因为  $x \in (-1, 0)$ , 所以  $3-x > 0$ ,



要证  $f(x) > 0$  恒成立, 即证  $e^x(3-x) - (3+2x) > 0$  恒成立, -----1 分

令  $g(x) = e^x(3-x) - (3+2x)$ , 则  $g'(x) = e^x(2-x) - 2$ , -----2 分

令  $h(x) = g'(x)$ , 则  $h'(x) = e^x(1-x)$ ,

因为  $-1 < x < 0$ , 所以  $h'(x) > 0$ ,

即  $y = h(x) = g'(x)$  在  $(-1, 0)$  上单调递增,

所以  $g'(x) < g'(0) = 0$ ,

所以  $y = g(x)$  在  $(-1, 0)$  上单调递减,

所以  $g(x) > g(0) = 0$ , 即证. -----4 分

$$(2) f'(x) = e^x - \frac{-ax^2 + 6ax + 9}{(3-x)^2} = \frac{1}{(3-x)^2} [e^x(3-x)^2 - (9 + 6ax - ax^2)],$$

令  $k(x) = e^x(3-x)^2 - (9 + 6ax - ax^2)$ , 有  $k(0) = 0$ ,

而  $k'(x) = (x-3)[e^x(x-1) + 2a]$ ,

令  $p(x) = e^x(x-1) + 2a$ , 则  $p'(x) = xe^x$ ,

当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $p'(x) < 0$ , 所以  $y = p(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减,

当  $x \in (0, 3)$  时,  $p'(x) > 0$ , 所以  $y = p(x)$  在  $(0, 3)$  上单调递增,

$p(0) = 2a - 1$ , -----6 分

①当  $a \geq \frac{1}{2}$  时,

$y = p(x)$  在  $(-\infty, 3)$  上的最小值为  $p(0) = 2a - 1 \geq 0$ ,

所以  $p(x) \geq 0$  在  $(-\infty, 3)$  恒成立,

当  $x \in (-\infty, 3)$  时,  $x-3 < 0$ , 所以  $k'(x) = (x-3)p(x) \leq 0$ ,

所以  $y = k(x)$  在  $(-\infty, 3)$  上单调递减,

又  $k(0) = 0$ , 所以当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $k(x) > 0$ , 即  $f'(x) > 0$ ,

当  $x \in (0, 3)$  时,  $k(x) < 0$ , 即  $f'(x) < 0$ ,

所以当  $a \geq \frac{1}{2}$  时,  $x=0$  是函数  $y=f(x)$  的极大值点;

-----8 分

②当  $0 < a < \frac{1}{2}$  时,

因为  $p(0) = 2a - 1 < 0$ ,  $p(1) = 2a > 0$ , 所以  $p(0) \cdot p(1) < 0$ ,

所以存在  $x_1 \in (0, 1)$ , 使  $p(x_1) = 0$ ,

因为  $y = p(x)$  在  $x \in (0, 3)$  单调递增,

所以当  $x \in (0, x_1)$  时,  $p(x) < 0$ ,  $x - 3 < 0$ , 所以  $k'(x) = (x - 3)p(x) > 0$ ,

所以  $y = k(x)$  在  $(0, x_1)$  上单调递增,

所以  $k(x) > k(0) = 0$ , 即  $x \in (0, x_1)$  时,  $f'(x) > 0$ ,

这与  $x=0$  是函数  $y=f(x)$  的极大值点不符合, 所以此种情况不成立;

-----10 分

③当  $a \leq 0$  时,

当  $x \in (0, 3)$  时,  $p'(x) = xe^x > 0$ , 所以  $y = p(x)$  在  $(0, 3)$  上单调递增,

又  $p(0) < 0$ ,  $p(1) = 2a \leq 0$ ,

当  $x \in (0, 1)$  时,  $p(x) < 0$ ,  $x - 3 < 0$ , 所以  $k'(x) = (x - 3)p(x) > 0$ ,

即  $y = k(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增,

所以  $k(x) > k(0) = 0$ , 即  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ ,

这与  $x=0$  是函数  $y=f(x)$  的极大值点不符合, 所以此种情况不成立.

综上所述实数  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ . -----12 分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线