高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数及其应用、三角函数、解三角形、平面向量。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1\. 已知集合 $A=\{y|y=\sin x\}$，$B=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$，则 $\complement_B A=$

A. $[1,3]$　　B. $[-1,3]$　　C. $(1,3)$　　D. $(1,3]$

2\. 在△ABC 中，$A=60^\circ$，$BC=\sqrt{3}$，则△ABC 外接圆的半径为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3\. 已知 A,B,C,D 为平面上四点，则"向量 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$"是"直线 $AB/\!/CD$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4\. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，若 $|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$，则 $|\boldsymbol{a}|=$

A. 2　　B. 3　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

5\. 若 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)=$

A. $-\frac{7}{25}$　　B. $-\frac{16}{25}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $\frac{16}{25}$

6\. 我们知道二氧化碳是温室性气体，是全球变暖的主要元凶. 在室内二氧化碳含量的多少也会对人体健康带来影响. 下表是室内二氧化碳浓度与人体生理反应的关系：

室内二氧化碳浓度(单位：ppm)	人体生理反应
不高于 1 000	空气清新，呼吸顺畅
1 000～2 000	空气浑浊，觉得昏昏欲睡
2 000～5 000	感觉头痛，嗜睡，呆滞，注意力无法集中
大于 5 000	可能导致缺氧，造成永久性脑损伤，昏迷甚至死亡

《室内空气质量标准》和《公共场所卫生检验办法》给出了室内二氧化碳浓度的国家标准为：室内二氧化碳浓度不大于 0.1%(0.1%即为 1 000 ppm)，所以室内要经常通风换气，保持二氧化碳浓度水平不高于标准值. 经测定，某中学刚下课时，一个教室内二氧化碳浓度为 2 000 ppm，若开窗通风后二氧化碳浓度 $y\%$ 与经过时间 t(单位：分钟)的关系式为 $y=0.05+\lambda e^{-\frac{t}{9}}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$，则该教室内的二氧化碳浓度达到国家标准需要开窗通风时间至少约为(参考数据：$\ln 3\approx 1.099$，$\ln 5\approx 1.609$)

A. 10 分钟　　B. 11 分钟　　C. 12 分钟　　D. 20 分钟

7. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$2a\cos^2\frac{B}{2}=a+c$，则△ABC 为

A. 钝角三角形
B. 正三角形
C. 直角三角形
D. 等腰直角三角形

8. 已知角 α 的终边经过点 $P(-4m,3m)(m\neq 0)$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. 1 或 $-\frac{2}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$

9. 在△ABC 中，D 为边 BC 的中点，E 在边 AC 上，且 $EC=2AE$，AD 与 BE 交于点 F，若 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

10. 已知函数 $f(x)=\frac{3a+2\sin x+a\cos x}{3+\cos x}$ 的最大值与最小值的和为 6，则实数 a 的值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

11. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>0)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，则下列结论错误的是

A. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{3\pi}{8},0\right)$ 对称

B. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $[-1,1]$

D. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，得到的函数图象关于 y 轴对称

12. 已知 $a=10\sin 0.01$，$b=e^{0.1}-1$，$c=\frac{1}{10}\cos 0.01$，则

A. $b>a>c$　　B. $a>b>c$
C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

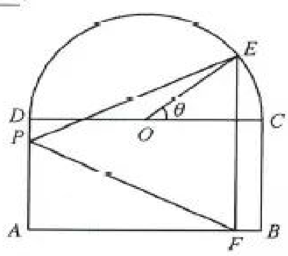
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a\log_2 x, x>0,\\ -e^{x+1}-3x, x\leqslant 0,\end{cases}$ 且 $f(f(-1))=3$，则 $a=$________.

14. 已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=bx+e$，则 $b=$________.

15. 在△ABC 中，$BC=2$，$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，则△$ABC$ 的周长为________.

16. 如图为矩形 $ABCD$ 与半圆 O 的组合图形，其中 $AB=2AD=2$，E 为半圆弧上一点，$EF\perp AB$，垂足为 F，点 P 在线段 AD 上，且 $PE=PF$，设∠$COE=\theta(0\leqslant\theta<\pi)$，则△$PEF$ 的面积 S 与 θ 的关系式为 $S=$________；S 的最大值为________.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2x)$，$\boldsymbol{b}=(x,3)$，$\boldsymbol{c}=(-2,0)$.

(1)若 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\parallel(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$，求实数 x 的值；

(2)若 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ 的夹角为锐角，求实数 x 的取值范围.

18.(本小题满分 12 分)

已知向量 $\boldsymbol{a}=(1-\cos 2x,\sin 2x)$，$\boldsymbol{b}=(2\cos^2 x,\sqrt{3}\cos 2x)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的取值范围.

19.(本小题满分 12 分)

若函数 $f(x)=ax^2\ln x+bx^2-c$(a,b,c 为常数)在 $x=1$ 处取得极值 $-3-c$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)对任意 $x>0$，不等式 $f(x)\geqslant -2c^2$ 恒成立，求 c 的取值范围.

20.(本小题满分 12 分)

在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,$a\sin(B-C)=b\sin(A-C)$.

(1)证明:$a=b$;

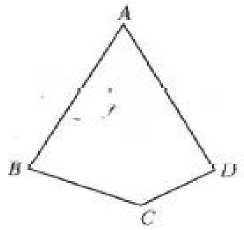
(2)若$c=5$,$\cos C=\frac{12}{13}$,求$\triangle ABC$的面积.

21.(本小题满分 12 分)

如图,在平面四边形$ABCD$中,$AB=AD=20$,$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$,$\angle BCD=\frac{2\pi}{3}$.

(1)若$\angle ABC=\frac{5\pi}{12}$,求$BC$的长;

(2)求四边形$ABCD$周长的最大值.



22.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=e^x-x^2-2x+a$

(1)证明:$f(x)$有两个极值点,且分别在区间$(-1,0)$和$(\sqrt{2},\sqrt{3})$内;

(2)若$f(x)$有 3 个零点,求整数a的值.

参考数据:$e^{\sqrt{2}}\approx4.11$,$e^{\sqrt{3}}\approx5.65$,$\sqrt{3}\approx1.73$,$\sqrt{2}\approx1.41$.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　由题意得 $A=[-1,1]$，$B=[-1,3]$，故 $\complement_B A=(1,3]$. 故选 D.

2. A　由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A}=2R$，所以 $2R=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2$，所以 $R=1$. 故选 A.

3. B　由直线 $AB/\!/CD$，得向量 $AB/\!/CD$；反之，若向量 $AB/\!/CD$，则直线 AB 和 CD 可能重合. 故选 B.

4. D　由题意，得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=13$，即 $|\boldsymbol{a}|^2-3|\boldsymbol{a}|-4=0$，解得 $|\boldsymbol{a}|=4$，或 $|\boldsymbol{a}|=-1$（舍去）. 故选 D.

5. C　$\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{25}$. 故选 C.

6. A　由题意知 2 000 ppm$=0.2\%$，所以 $0.2=0.05+\lambda e^{-\frac{0}{9}}$，解得 $\lambda=0.15$；由 $0.05+0.15e^{-\frac{t}{9}}\leqslant 0.1$，解得 $e^{-\frac{t}{9}}\leqslant\frac{1}{3}$，所以 $t\geqslant 9\ln 3\approx 9.981$，所以至少需要开窗通风时间约为 10 分钟. 故选 A.

7. C　法一：因为 $2a\cos^2\frac{B}{2}=2a\cdot\frac{1+\cos B}{2}=a+a\cos B=a+c$，所以 $a\cos B=c$，由余弦定理，得 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c$，整理得 $a^2=b^2+c^2$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 故选 C.

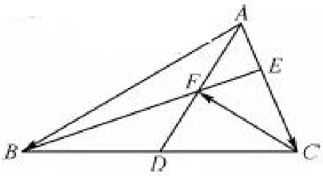
法二：由 $2a\cos^2\frac{B}{2}=a+c$，得 $2a\cdot\frac{1+\cos B}{2}=a+a\cos B=a+c$，即 $a\cos B=c$，所以 $\sin A\cos B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即 $\cos A\sin B=0$，因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos A=0$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 故选 C.

8. D　由题意得点 P 到原点的距离为 $r=\sqrt{(-4m)^2+(3m)^2}=5|m|$.

当 $m>0$ 时，$r=5m$，则 $\sin\alpha=\frac{3m}{5m}=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{-4m}{5m}=-\frac{4}{5}$，所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$.

当 $m<0$ 时，$r=-5m$，则 $\sin\alpha=\frac{3m}{-5m}=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{-4m}{-5m}=\frac{4}{5}$，所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}=-\frac{2}{5}$. 综上，$2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为 $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$. 故选 D.

9. A　设 $AF=x\,AD$，因为 D 为 BC 的中点，E 在边 AC 上，且 $EC=2AE$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{x}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3x}{2}\overrightarrow{AE}$，因为 F,B,E 三点共线，所以 $\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}=1$，解得 $x=\frac{1}{2}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=\frac{1}{4}$，$\mu=-\frac{3}{4}$，所以 $\lambda+\mu=-\frac{1}{2}$. 故选 A.



10. B　$f(x)=\frac{3a+2\sin x+a\cos x}{3+\cos x}=a+\frac{2\sin x}{3+\cos x}$，令 $g(x)=\frac{2\sin x}{3+\cos x}$（由题意知 $f(x)$ 既有最大值，也有最小值，所以 $g(x)$ 既有最大值，也有最小值），因为 $f(x)=g(x)+a$，则 $f(x)_{\max}=g(x)_{\max}+a$，$f(x)_{\min}=g(x)_{\min}+a$，由题意知 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}+2a=6$；因为 $g(x)$ 为奇函数，所以 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=0$，所以 $2a=6$，即 $a=3$. 故选 B.

11. C　由题意知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$，由 $f(x)$ 的图象相邻两对称轴间距离为 $\frac{\pi}{2}$，得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$（$T$ 为 $f(x)$ 的最小正周期），所以 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=2$，于是 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$. 因为 $f\left(-\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left[2\times\left(-\frac{3\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin(-\pi)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{3\pi}{8},0\right)$ 对称，故 A 正确；由 $-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}$，所以 $f(x)$ 的一个单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$，又 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，故 B 正

确；由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $0\leqslant 2x\leqslant\pi$，所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3}{4}\pi$，从而 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，所以 $f(x)\in[-1,\sqrt{2}]$，故 C 错误；因为 $f\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{2}\cos 2x$ 为偶函数，所以 $y=-\sqrt{2}\cos 2x$ 的图象关于 y 轴对称，故 D 正确. 故选 C.

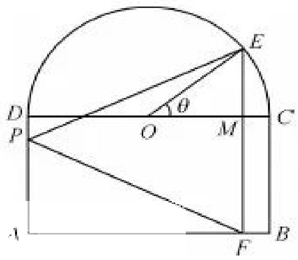
12. A　显然 $a>0,b>0,c>0$，因为 $\frac{a}{c}=100\tan 0.01>100\times 0.01=1$，所以 $a>c$；因为 $\sin 0.01<0.01$，所以 $10\sin 0.01<0.1$，易证 $e^x\geqslant x+1$（当且仅当 $x=0$ 时等号成立），所以 $e^{0.1}-1>0.1+1-1=0.1$，所以 $b>a$，所以 $b>a>c$. 故选 A.

13. 3　因为 $f(-1)=-e^0-3\times(-1)=2$，所以 $f(f(-1))=f(2)=a\log_2 2=3$，所以 $a=3$.

14. $-e$　$f'(x)=e^x-2ax$，则 $f'(1)=e-2a$，又 $f(1)=e-a$，故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e-a)=(e-2a)(x-1)$，即 $y=(e-2a)x+a$，所以 $\begin{cases}b=e-2a,\\a=e,\end{cases}$ 解得 $a=e,b=-e$.

15. 6　由 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，得 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，设 $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，则 $\angle BAD=\angle CAD$，又 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以 $AD\perp BC$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，又 $BC=2$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 6.

16. $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}$　(2 分)　$\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ (3 分)



如图，设 EF 与 CD 的交点为 M，则 $EM=\sin\theta,OM=|\cos\theta|$，所以 $EF=1+\sin\theta,DM=1+\cos\theta$，所以 $S=\frac{1}{2}EF\cdot DM=\frac{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}{2}=\frac{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，令 $t=\sin\theta+\cos\theta$，则 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，且 $t\in(-1,\sqrt{2}]$，所以 $S=\frac{1}{4}(t+1)^2$，显然 $S=\frac{1}{4}(t+1)^2$ 在 $(-1,\sqrt{2}]$ 上单调递增，所以当 $t=\sqrt{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，S 取得最大值，其最大值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$.

17. 解：(1)由题意有 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1+2x,2x+6)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(4,4x)$. ………………………… 1 分

因为 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\parallel(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$，所以 $(1+2x)\cdot 4x-4(2x+6)=0$. ………………………… 2 分

即 $2x^2-x-6=0$，解得 $x=-\frac{3}{2}$ 或 $x=2$. ………………………… 4 分

(2)若 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ 的夹角为锐角，则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})>0$，且 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ 不共线，

由(1)知若 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ 不共线，则 $x\neq-\frac{3}{2}$ 且 $x\neq 2$，………………………… 6 分

由 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=4(1+2x)+4x(2x+6)>0$，整理得 $2x^2+8x+1>0$，

解得 $x<\frac{-4-\sqrt{14}}{2}$，或 $x>\frac{-4+\sqrt{14}}{2}$，………………………… 8 分

所以实数 x 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{-4-\sqrt{14}}{2}\right)\cup\left(\frac{-4+\sqrt{14}}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$. ………………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2(1-\cos 2x)\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x$，………………………… 2 分

所以 $f(x)=2\times 2\sin^2 x\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x=\sin^2 2x+\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，

………………………… 5 分

则 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$. ………………………… 6 分

(2)因为 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}$，则 $-\frac{5\pi}{6}\leqslant 4x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}$，…………来源：高三答案公众号………… 8分

所以 $-1\leqslant\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2}$，………………………… 10 分

所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\leqslant 1$，…………………… 11 分

所以 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$. …………………… 12 分

19. 解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(1) $f'(x)=2ax\ln x+ax+2bx$，由题意得 $f'(1)=a+2b=0$，$f(1)=b-c=-3-c$，…………………… 2 分

解得 $a=6$，$b=-3$，所以 $f'(x)=12x\ln x$. …………………… 3 分

因为当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$；当 $x>1$ 时，$\ln x>0$，…………………… 4 分

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$.

由此也验证了 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值. …………………… 6 分

(2) 由 (1) 知，$f(x)_{\min}=f(1)=-3-c$，…………………… 7 分

所以 $-3-c\geqslant-2c^2$，即 $2c^2-c-3\geqslant 0$，解得 $c\leqslant-1$，或 $c\geqslant\frac{3}{2}$，…………………… 10 分

所以 c 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$. …………………… 12 分

20. (1) 证明：因为 $a\sin(B-C)=b\sin(A-C)$，由正弦定理得 $\sin A\sin(B-C)=\sin B\sin(A-C)$，

所以 $\sin A(\sin B\cos C-\cos B\sin C)=\sin B(\sin A\cos C-\cos A\sin C)$，…………………… 2 分

即 $\sin A\cos B\sin C=\sin B\cos A\sin C$，

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=0$，即 $\sin(A-B)=0$，

因为 A，B 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $A-B\in(-\pi,\pi)$，…………………… 4 分

所以 $A-B=0$，即 $A=B$，所以 $a=b$. …………………… 6 分

(2) 解：由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

又由 $a=b$ 及 $c=5$，$\cos C=\frac{12}{13}$，得 $25=2a^2-\frac{24}{13}a^2$，

解得 $a^2=\frac{25\times 13}{2}$. …………………… 8 分

由 $\cos C=\frac{12}{13}$，$C\in(0,\pi)$，得 $\sin C=\frac{5}{13}$，…………………… 10 分

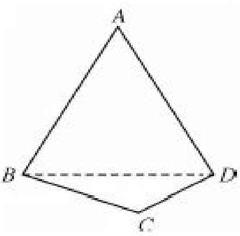
所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot a^2\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{25\times 13}{2}\times\frac{5}{13}=\frac{125}{4}$. …………………… 12 分

21. 解：(1) 连接 BD，则 $\triangle ABD$ 为等边三角形，所以 $BD=20$，$\angle ABD=\angle ADB=\frac{\pi}{3}$，

因为 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$\angle BCD=\frac{2\pi}{3}$，$\angle ABC=\frac{5\pi}{12}$，所以 $\angle ADC=\frac{7\pi}{12}$，…………………… 2 分

所以 $\angle BDC=\frac{\pi}{4}$，…………………… 3 分

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，



所以 $BC=\frac{BD\cdot\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}=\frac{20\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{20\sqrt{6}}{3}$. …………………… 5 分

(2) 法一：设 $\angle ABC=\theta\left(\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}\right)$，则 $\angle DBC=\theta-\frac{\pi}{3}$，$\angle BDC=\frac{2\pi}{3}-\theta$，…………………… 6 分

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$，…………………… 7 分

所以 $BC=\frac{BD\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}=\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$，…………………… 8 分

$CD=\dfrac{BD\sin\angle DBC}{\sin\angle BCD}=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$，…………………………………………………… 9 分

所以四边形 $ABCD$ 的周长 $l=40+\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)=40+\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，………………… 10 分

所以当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，周长取得最大值，且 $l_{\max}=40+\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………… 12 分

法二：设 $BC=m$，$CD=n$，在△BCD 中，由余弦定理得

$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$，

即 $20^2=m^2+n^2-2mn\cos\dfrac{2\pi}{3}$，…………………………………………………………………… 8 分

$400=m^2+n^2+mn=(m+n)^2-mn\geqslant(m+n)^2-\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}(m+n)^2$，…………………………………… 10 分

因此 $m+n\leqslant\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $m=n$，即 $BC=CD$ 时，等号成立. …………………………………………… 11 分

所以四边形 $ABCD$ 周长的最大值为 $40+\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………… 12 分

22. (1) 证明：$f'(x)=e^x-2x-2$，令 $g(x)=e^x-2x-2$，则 $g'(x)=e^x-2$，………………………………… 1 分

令 $g'(x)<0$，得 $x<\ln 2$；令 $g'(x)>0$，得 $x>\ln 2$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，……………………………………… 2 分

所以 $g(x)_{\min}=g(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2-2=-2\ln 2<0$，

又 $g(-1)=e^{-1}-2\times(-1)-2=e^{-1}>0$，$g(0)=-1<0$，$g(\sqrt{2})=e^{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}-2<0$，

$g(\sqrt{3})=e^{\sqrt{3}}-2\sqrt{3}-2>0$，且 $0<\ln 2<\sqrt{2}$，

故 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 上分别存在一个零点，设为 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$，……………………… 3 分

所以在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上，$g(x)>0$，在 (x_1,x_2) 上，$g(x)<0$，

即在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，在 (x_1,x_2) 上，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减，……………………………… 4 分

所以 x_1 为 $f(x)$ 的极大值点，x_2 为 $f(x)$ 的极小值点，

故 $f(x)$ 有两个极值点，且分别在区间 $(-1,0)$ 和 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 内. …………………………………………… 5 分

(2) 解：由(1)知 $-1<x_1<0$，$\sqrt{2}<x_2<\sqrt{3}$，$f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减，

$f(x_1)$ 为 $f(x)$ 的极大值，$f(x_2)$ 为 $f(x)$ 的极小值. ……………………………………………………… 6 分

要使 $f(x)$ 有 3 个零点，则必有 $f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$.

因为 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，所以 $e^{x_1}=2x_1+2$，$e^{x_2}=2x_2+2$，

所以 $f(x_1)=e^{x_1}-x_1^2-2x_1+a=a+2-x_1^2$，$f(x_2)=a+2-x_2^2$，…………………………………………… 7 分

所以 $a+2-x_1^2>0$，$a+2-x_2^2<0$，

所以 $x_1^2-2<a<x_2^2-2$，……………………………………………………………………………… 8 分

因为 $x_1\in(-1,0)$，$x_2\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$，所以 $x_1^2-2\in(-2,-1)$，$x_2^2-2\in(0,1)$，

故符合 $x_1^2-2<a<x_2^2-2$ 的整数 a 的值只有 0 和 -1. ……………………………………………………… 9 分

当 $a=0$ 时，$f(x)=e^x-x^2-2x$，$f(-3)=\dfrac{1}{e^3}-3<0$，$f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$，$f(3)>0$，

结合 $f(x)$ 的单调性，知 $f(x)$ 在 $(-3,x_1)$，(x_1,x_2)，$(x_2,3)$ 上各存在一个零点，共 3 个零点；……………… 10 分

当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^x-(x+1)^2$，$f(-2)<0$，$f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$，$f(3)>0$，

结合 $f(x)$ 的单调性，知 $f(x)$ 在 $(-2,x_1)$，(x_1,x_2)，$(x_2,3)$ 上各存在一个零点，共 3 个零点. ……………… 11 分

故所求整数 a 的值为 0 和 -1. ………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。