参考答案

单选 1-5 B B B A A　6-9BACA

填空 10.$\sqrt{5}$　11.$2x+y-10=0$　12.-80　13.$\frac{8}{81}$　14.3　15.$\frac{3}{2}$　$\frac{18}{5}$

解答

16.解：(I) $\because b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，

$\therefore 2bc\cos A=\frac{4\sqrt{2}}{3}bc$.

$\therefore \cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore$在$\triangle ABC$中，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{1}{3}$.

(II) $\because \triangle ABC$的面积为$\sqrt{2}$，

即$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{6}bc=\sqrt{2}$，

$\therefore bc=6\sqrt{2}$.

又$\because \sqrt{2}sinB=3sinC$，

由正弦定理得$\sqrt{2}b=3c$，

$\therefore b=3\sqrt{2}$，$c=2$.

则$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6$，

$\therefore a=\sqrt{6}$.

$\therefore \triangle ABC$的周长为 $2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

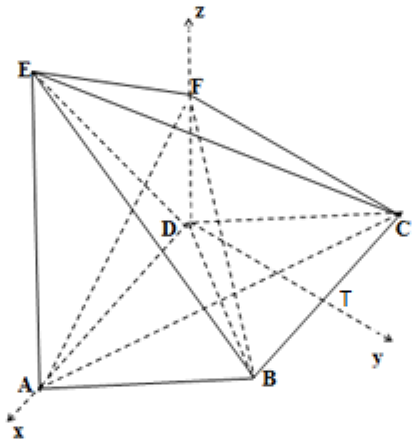
17.(I)证明：取BC中点T，连接DT，

由题可知，$\triangle BCD$为等边三角形，则$DT\perp BC$，

又$AD//BC$，则$DT\perp DA$，

因为$EA\perp$平面$ABCD$，$EA//FD$，则$DF\perp$平面$ABCD$，

以D为原点，分别以$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DT}$，$\overrightarrow{DF}$的方向为x轴，y轴，z轴正方向建立空间直角坐标系，



则$A(2,0,0)$，$B(1,\sqrt{3},0)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，$D(0,0,0)$，$E(2,0,2)$，$F(0,0,1)$．

$\overrightarrow{EA}=(0,0,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，

设$\vec{q}=(x,y,z)$为平面EAB的法向量，

则$\begin{cases}\vec{q}\cdot\overrightarrow{EA}=-2z=0\\ \vec{q}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，取$y=1$，得$\vec{q}=(\sqrt{3},1,0)$，

又$\overrightarrow{FC}=(-1,\sqrt{3},-1)$，得$\vec{q}\cdot\overrightarrow{FC}=0$，

又∵直线$FC\not\subset$平面EAB，

∴直线$FC//$平面EAB．

(Ⅱ)解：$\overrightarrow{EF}=(-2,0,-1)$，$\overrightarrow{FC}=(-1,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{FA}=(2,0,-1)$，

设$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$为平面EFC的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=-2x_1-z_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FC}=-x_1+\sqrt{3}y_1-z_1=0\end{cases}$，

取$x_1=-3$，得$\vec{n}=(-3,\sqrt{3},6)$，

设$\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$为平面FCA的法向量，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{FA}=2x_2-z_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{FC}=-x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0\end{cases}$，

得$\vec{m}=(1,\sqrt{3},2)$，

$\therefore\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

∴二面角$E-FC-A$的正弦值为：$\sqrt{1-(\frac{\sqrt{6}}{4})^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$．

(Ⅲ)解：设$\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EC}=(-3\lambda,\sqrt{3}\lambda,-2\lambda)$，则$M(2-3\lambda,\sqrt{3}\lambda,2-2\lambda)$，

则$\overrightarrow{BD}=(-1,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DM}=(2-3\lambda,\sqrt{3}\lambda,2-2\lambda)$，

设$\vec{p}=(x_3,y_3,z_3)$为平面BDM的法向量，

则$\begin{cases}\vec{p}\cdot\overrightarrow{BD}=-x_3-\sqrt{3}y_3=0\\ \vec{p}\cdot\overrightarrow{DM}=(2-3\lambda)x_3+\sqrt{3}\lambda y_3+(2-2\lambda)z_3=0\end{cases}$，

取$y_3=-1$，得$\vec{p}=(\sqrt{3},-1,\frac{2\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}}{1-\lambda})$，

由$\overrightarrow{EB}=(-1,\sqrt{3},-2)$，

得$|\cos<\overrightarrow{EB},\vec{p}>|=\left|\frac{-2\sqrt{3}-2\times\frac{2\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}}{1-\lambda}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+(\frac{2\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}}{1-\lambda})^2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{8}$，

解得$\lambda=\frac{1}{4}$或$\lambda=-\frac{7}{8}$(舍)，

∴线段BC上存在点M满足条件，且$\frac{EM}{MC}=\frac{1}{3}$.

18.解：(1)当$n=1$时，$3a_1=2(a_1-1)$，则$a_1=-2$.

当$n\geq 2$时，$\begin{cases}3S_n=2(a_n-1)\\3S_{n-1}=2(a_{n-1}-1)\end{cases}$，两式相减可得，$a_n=-2a_{n-1}$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=-2$.

所以数列$\{a_n\}$是首项为-2，公比为-2的等比数列，

故$a_n=(-2)^n$，

因为$b_1=a_1=-2$，设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，则$b_2=-2+d$，$b_3=-2+2d$，$b_7=-2+6d$，

由b_2，b_3，b_7成等比数列，所以$(-2+2d)^2=(-2+d)(-2+6d)$，解得$d=3$，

故$b_n=3n-5$，

(2)$c_n=a_nb_n=(3n-5)(-2)^n$，

$T_n=(-2)\times(-2)^1+1\times(-2)^2+4\times(-2)^3+\cdots+(3n-5)\times(-2)^n$，

$-2T_n=(-2)\times(-2)^2+1\times(-2)^3+4\times(-2)^4+\cdots+(3n-8)\times(-2)^n+(3n-5)\times(-2)^{n+1}$.

相减得 $3T_n=4+3[(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4+\cdots+(-2)^n]-(3n-5)\times(-2)^{n+1}=8-(3n-4)(-2)^{n+1}$，

则$T_n=\frac{8-(3n-4)(-2)^{n+1}}{3}$.

19.解：(1) ∵椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，∴ $a=2c$，

由椭圆C的左、右焦点分别为F_1、F_2，M是C上一点，

$|MF_1|=2$，且$|\overrightarrow{MF_1}||\overrightarrow{MF_2}|=2\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}$，

得 $\cos<\overrightarrow{MF_1},\overrightarrow{MF_2}>=\frac{\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_1}||\overrightarrow{MF_2}|}=\frac{1}{2}$，

∴$\angle F_1MF_2=60°$.

在$\triangle F_1F_2M$中，由余弦定理得$(2c)^2=2^2+(4c-2)^2-2\times 2(4c-2)cos60°$，

解得$c=1$，

则$a=2$，$b=\sqrt{3}$，

∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2)由题意可得直线l的斜率存在，

设直线l的方程为$y-1=k(x-4)$，即$y=kx+(1-4k)$，

代入椭圆C的方程，

整理得$(3+4k^2)x^2+(8k-32k^2)x+64k^2-32k-8=0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{32k^2-8k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{64k^2-32k-8}{3+4k^2}$.

设$Q(x_0,y_0)$，

由$|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}||\overrightarrow{PB}|$，

得$(4-x_1)(x_0-x_2)=(x_1-x_0)(4-x_2)$(考虑线段在$x$轴上的射影即可)，

∴ $8x_0=(4+x_0)(x_1+x_2)-2x_1x_2$，

于是 $8x_0=(4+x_0)\cdot\frac{32k^2-8k}{3+4k^2}-\frac{2(64k^2-32k-8)}{3+4k^2}$，

整理得 $3x_0-2=(4-x_0)k$，①

又$k=\frac{y_0-1}{x_0-4}$，

代入①式得 $3x_0+y_0-3=0$，

∴点Q总在直线 $3x+y-3=0$ 上.

20.解：(1)由已知$f(x)=\frac{x^2+x+a}{x}$，

$g(x)=f(x)-1=x+\frac{a}{x},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

$g(-x)=-x-\frac{a}{x}=-\left(x+\frac{a}{x}\right)=-g(x)$　故$g(x)$为奇函数.

(2)①当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=x+\frac{1}{2x}+1$，$\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且$x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=(x_1-x_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right)=(x_1-x_2)\left(1-\frac{1}{2x_1x_2}\right)$

又因为$x_1,x_2\in[1,+\infty)$，所以$(x_1-x_2)<0$，$\left(1-\frac{1}{2x_1x_2}\right)>0$，所以$f(x_1)-f(x_2)<0$

即$f(x_1)<f(x_2)$，故函数$f(x)$在$[1,+\infty)$为单调递增，

函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上的最小值为$f(1)=1+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$

②由①知，$x_1\in[1,2]$，所以$f(x_1)\in\left[\frac{5}{2},\frac{13}{4}\right]$，

当$k=0$时，$h(x_2)=5$，$f(x_1)\le h(x_2)$成立，符合题意．

当$k>0$时，$h(x_2)=kx_2+5-2k$在$x_2\in[0,1]$为单调递增，$h(x_2)\in[5-2k,5-k]$

对任意的$x_1\in[1,2]$，总存在$x_2\in[0,1]$，使得$f(x_1)\le h(x_2)$

故$f(x_1)_{\max}\le h(x_2)_{\max}$，即$\frac{13}{4}\le 5-k$，解得$0<k\le\frac{7}{4}$

当$k<0$时，$h(x_2)=kx_2+5-2k$在$x_2\in[0,1]$为单调递减，$h(x_2)\in[5-k,5-2k]$

同理：$f(x_1)_{\max}\le h(x_2)_{\max}$，即$\frac{13}{4}\le 5-2k$，解得$k<0$

综上可知：k的取值范围为$\left(-\infty,\frac{7}{4}\right]$.