

清华大学2021~2022学年TACA综合测试试题

2021年9月4日

重要提示:

1. 每道题的答案均为正整数.
2. 若实数满足 $n \leq a < n+1$, 其中 n 为整数, 则取整 $[a] = n$.
3. $\det A$ 表示方阵 A 的行列式, A^T 表示矩阵 A 的转置.
4. Id 表示单位方阵.
5. Z 表示全体整数, C 表示全体复数
6. $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))'$ 表示 f 阶导数.
7. $y = \arctan(x)$ 表示函数 $x = \tan(y)$ 的反函数
8. 已知下列近似值

$e \approx 2.7182818$, $\pi \approx 3.1415927$, $\log_{10} 2 \approx 0.301030$, $\log_{10} 3 \approx 0.477121$,
 $\log_{10} 5 \approx 0.698970$, $\log_{10} 7 \approx 0.845098$

填空题：共15题，每题10分，满分150分。

1. $\sum_{k=0}^8 (-1)^k \binom{8}{k} k^8$ 的值为_____.

2. 在模 2520 的同余系里，满足方程 $a^2 \equiv a \pmod{2520}$ 的元素 a 的个数为_____.

3. 考虑如下的递归序列 $(a_n)_{n \geq 0}$ ， $a_0 = -1$ ， $a_1 = 1$ ， $a_n = -6a_{n-1} - a_{n-2} - 8$ ， $n \geq 2$ ，那么 $[a_9] =$ _____.

4. 已知实数 x 和 y 满足 $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8x - 8y = -3$. 记 $x + y - x^2 - y^2$ 的最大值为 I ，则 $[100I] =$ _____.

5. $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(2n-k)(2n+k)}$ ，则 $[100I] =$ _____.

6. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\cos t)^2} dt$ ，则 $[10I] =$ _____.

7. $I = \int_1^9 \sqrt{(x-1)(9-x)} dt$ ，则 $[I] =$ _____.

8. 已知 $f(x) = e^{\sin x^2}$, 则 $[-f^{(8)}(0)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 求 $[100 \arctan 0.5]$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 考虑如下 2021×2021 的方阵 $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 2021 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \end{pmatrix}$, 这里 M 的行通过依

次地将行向量 $(1, 2, 3, \dots, 2020, 2021)$ 的某个位置替换为 0 得到, 则 $\left[\frac{1}{2020!} \det M \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 令 $A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, 令 $M = A - A^2 + A^3 - A^4 + \cdots + (-1)^{n-1} A^n + \cdots$, 则

$[2021 \det M] = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 如果实数 k 使得关于 x, y, z 的线性方程组 $\begin{cases} kx + y + 2z = 1 \\ 3x + ky + 4z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$ 无解, 则称其是一个“好

实数”. 设所有好实数之和为 I , 则 $[I] = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 A 是一个 2022×2000 矩阵, 如果关于 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2000})^T$ 的线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间维数等于 10, 则关于 $y = (y_1, y_2, \dots, y_{2022})^T$ 的线性方程组 $A^T y = 0$ 的解空间维度是_____.
14. 记 S_3 为 3 个元素的置换群, 则群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 到 S_3 的群同态的个数为_____.
15. 设 A 是一个 2×2 的可逆矩阵, 且方阵中每个位置的元素在模 3 同余系 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 中取值. 那么满足 $A^{50} \equiv I_2 \pmod{3}$ 方阵 A 的个数为_____.

1 组合数

$\sum_{k=0}^8 (-1)^k \binom{8}{k} k^8$ 的值为_____.

解:

$$\text{令 } I_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^n.$$

$$\text{则 } I_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} k^n \cdot \frac{n}{k} = -n I_{n-1}.$$

$$\text{而 } I_1 = -1, \text{ 故 } I_8 = 8! = 40320.$$

【考点】组合数的递推公式

2 初等数论

在模 2520 的同余系里, 满足方程 $a^2 \equiv a \pmod{2520}$ 的元素 a 的个数为_____.

解: 2520 整除 $a(a-1)$, 其中 $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

对 $b \in \{2^3, 3^2, 5, 7\}$, a 模 b 的余数 r_b 均等于 0 或 1; 反之, 对于每组这样的余数 (r_8, r_9, r_5, r_7) , 这样的 a 存在且唯一 (此由中国剩余定理保证). 故所求 a 的个数为 $\boxed{16}$.

【考点】中国剩余定理.

3 数列

设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} - 8$, $n \geq 2$. 则 $a_9 =$ _____.

解:

令 $b_n = a_n + \frac{1}{2}$, 则 $b_n = -6b_{n-1} - 9b_{n-2}$.

因此 $b_n = (\lambda n + \mu)(-3)^n$, $b_0 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{3}{2}$.

解得 $\lambda = 0$, $\mu = -\frac{1}{2}$, 即 $b_n = -\frac{1}{2}(-3)^n$, $b_9 = \frac{3^9}{2}$.

故 $a_9 = \frac{3^9 - 1}{2} = \boxed{9841}$.

【考点】特征根方程.

4 不等式

已知实数 x, y 满足 $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8x - 8y = -3$. 记 $I = \max\{x + y - x^2 - y^2\}$, 则 $[100I] =$ _____.

解:



令 $r = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2}$, 则 $I = \max \left\{ \frac{1}{2} - r^2 \right\}$.

令 $x = \frac{1}{2} + r \cos \theta$, $y = \frac{1}{2} + r \sin \theta$, 代入方程可得 $r^2 = \frac{1}{5 + 3 \sin 2\theta} \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2} \right]$.

因此 $I = \frac{3}{8}$, $[100I] = [37.5] = \boxed{37}$.

【考点】数形结合.

5 极限

已知 $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(2n-k)(2n+k)}$, 则 $[100I] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(2 - \frac{k}{n}\right) \left(2 + \frac{k}{n}\right)} = \int_0^1 \frac{1}{(2-x)(2+x)} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} (\ln |2+x| - \ln(2-x)) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \ln 3. \end{aligned}$$

故所求值为 $[25 \ln 3] = \boxed{27}$.

【考点】定积分的定义与计算.

6 定积分

已知 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt$, 则 $[10I] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解:



令 $u = \tan t$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{1+u^2}} d \arctan u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+u^2} du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi. \end{aligned}$$

故所求为 $\left[\frac{5\sqrt{2}}{2} \pi \right] = \boxed{11}$.

【考点】三角有理函数的不定积分.

7 定积分

已知 $I = \int_1^9 \sqrt{(x-1)(9-x)} dx$, 则 $[I] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解:

令 $x-1 = 8 \sin^2 u$, $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

则

$$\begin{aligned} I &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u d(8 \sin^2 u) = 128 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos^2 u du \\ &= 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u du \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4u) d(4u) \\ &= 4s - \sin s \Big|_0^{2\pi} = 8\pi. \end{aligned}$$

故 $[I] = \boxed{25}$.

【考点】定积分的换元法.

8 高阶导数

已知 $f(x) = e^{\sin x^2}$, 则 $[-f^{(8)}(0)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解:

令 $f(x) = y$.

则 $y' = 2xy \cos x^2$.

故 $y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = 2x(y \cos x^2)^{(n-1)} + 2(n-1)(y \cos x^2)^{(n-2)}$.

令 $x = 0$, 得 $y^{(n)} = 2(n-1)(y \cos x^2)^{(n-2)}$.

由于 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$,

故 $\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$.

换言之, $g(x) = \cos x^2$ 的 4 阶导数是 -12 , 其余阶导数 (不大于 6 阶) 等于 0.

故 $x = 0$ 时, $y^{(2)} = 2y \cos x^2 = 2$,

$y^{(4)} = 6(yg)^{(2)} = 6y^{(2)}g = 12$,

$y^{(6)} = 10(yg)^{(4)} = 10y^{(4)}g + 10g^{(4)}y = 0$,

$y^{(8)} = 14(yg)^{(6)} = 14y^{(6)}g + 14 \times \binom{6}{4} y^{(2)}g^{(4)} = -5040$.

故所求值为 $\boxed{5040}$.

【考点】莱布尼兹公式、泰勒展开.

9 泰勒公式

求 $[100 \arctan 0.5]$ 的值.

解: 设 $y = \arctan x$, 则

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

因此

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

故

$$100 \arctan 0.5 < 100 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} \right) = 50 - \frac{25}{6} + \frac{5}{8} = 46\frac{11}{24},$$

$$100 \arctan 0.5 > 100 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{64} \right) = 50 - \frac{25}{6} + \frac{5}{8} - \frac{25}{112} > 46.$$

因此, 所求值为 $\boxed{46}$.

【考点】泰勒展开.

10 行列式

已知 2021×2021 的小猿方阵如下所示:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 2021 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $\left[\frac{1}{2020!} \det M \right] =$

解:



$$\begin{aligned}
 M &= \begin{pmatrix} 2020 \times 1 & 2020 \times 2 & 2020 \times 3 & 2020 \times 4 & \cdots & 2020 \times 2021 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 2021 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
 &= 2020 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 2021 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
 &= 2020 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2021 \end{pmatrix} \\
 &= 2020 \times 2021!
 \end{aligned}$$

故所求值为 $\boxed{4082420}$.

【考点】初等行变换.

【评注】也有不少同学的回忆版表示前面的系数是 $2021!$. 我们不排除不同学生可能拿到了不同的试题题面的可能 (因为不同同学题目次序似乎是不同的). 这样的话, 答案则是 2021 . 但是, 明显 2021 从猜答案的角度比起 4082420 更好蒙对, 或许这会对部分考生产生影响.

11 矩阵的幂次

令

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

令 $M = A - A^2 + A^3 - A^4 + \cdots + (-1)^{n-1}A^n + \cdots$, 则 $[2021 \det M] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - \frac{4}{3} & 0 \\ -2 & \frac{4}{3} & \lambda - \frac{2}{3} \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{2}{3}) \left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{9} \right).$$

这表明存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & * & * \\ 0 & \frac{1}{3} & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

故令 $f(x) = x - x^2 + x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}x = \frac{x}{1+x} \ (|x| < 1)$, 我们有

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} f\left(\frac{2}{3}\right) & * & * \\ 0 & f\left(\frac{1}{3}\right) & * \\ 0 & 0 & f\left(\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & * & * \\ 0 & \frac{1}{4} & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

因此 $|M| = |P^{-1}MP| = \frac{1}{40}$. 因此, 所求值为 $\boxed{50}$.

【考点】矩阵的对角化.

12 线性方程组的解

如果实数 k 使得关于 x, y, z 的线性方程组 $\begin{cases} kx + y + 2z = 1 \\ 3x + ky + 4z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$ 无解，则称其是一个“好猿数”。设所有好猿数之和为 I ，则 $[I] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：

由题设，知方程组 $\begin{cases} (2k+1)y + (k+2)z = 2k+1 \\ (k+6)y + 7z = 7 \end{cases}$ 无解。

于是，

$$(2k+1) \cdot 7 - (k+2)(k+6) = 0,$$

且

$$\frac{k+2}{7} \neq \frac{2k+1}{7}.$$

因此， $k^2 - 6k + 5 = 0$ 且 $k \neq 1$ ，因此 $k = 5$ ，所求和等于 $\boxed{5}$ 。

【考点】线性方程组解的情况。

【评注】本题当然可以用系数矩阵行列式等于 0 来解，但是解完后一定要记得检验，因为有可能是无解和无穷解两种情况。从检验的角度来说，直接用初等方法来解方程显然是要快一些的。

13 线性方程组的解

设 A 为一个 2022×2000 矩阵。如果关于 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2000})^T$ 的线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间维数等于 10，则关于 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{2022})^T$ 的线性方程组 $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 的解空间维度是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：



由于 $Ax = 0$ 解空间的维数是 10, 故 $\text{rank} A^T = \text{rank} A = 2000 - 10 = 1990$.
因此, $A^T y = 0$ 解空间的维数是 $2022 - 1990 = \boxed{32}$.

【考点】线性方程组的解空间、矩阵的秩.

14 群的同态

记 S_3 为 3 个元素的置换群, 则群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 到 S_3 的群同态的个数为 ____.

解:

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的同态像, 只能是 $\{e\}$ 或者 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 或者它本身.

S_3 没有 4 阶子群, 有三个与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同构的子群. 当像是 $\{e\}$ 时, 这样的同态有 1 个;
当像是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 时, 这个同态的 kernel 为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的一个子群, 这样的 kernel 共 3 个. 像与 kernel 确定后, 同态便唯一确定, 故所求个数为 $1 + 3 \times 3 = \boxed{10}$ 个.

【考点】同态基本定理.

15 有限域上的矩阵

设 A 为一个 2×2 的可逆方阵, 且方阵中每个位置的元素在模 3 同余系 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 中取值. 那么满足 $A^{50} \equiv I_2 \pmod{3}$ 方阵 A 的个数为 ____.

解:

域 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上的一般线性群是一个 48 元群; 这是因为它的两个列向量线性无关, 第一个列向量有 8 种选择, 第二个列向量有 6 种选择.

A 是这个 48 元群的 50 阶元, 因此 A 是一个 2 阶元.

设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则由 $A^2 \equiv I_2 \pmod{3}$ 知 $b(a+d)$ 与 $c(a+d)$ 均为 3 的倍数, $a^2 + bc$ 与 $d^2 + bc$ 均模 3 余 1.

因此, 要么 b, c 均为 $\bar{0}$, a, d 均不为 $\bar{0}$; 要么 a, d 均为 $\bar{0}$, $b = c = \bar{1}$ 或 $\bar{-1}$; 要么 $a = -d = \bar{1}$ 或 $\bar{-1}$, b, c 中恰有一个 $\bar{0}$.

这样的矩阵共有 $4 + 2 + 2 \times 4 = \boxed{14}$ 个.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线