吕梁市高三第二次模拟考试（2023.4）

数学试题答案

1.【答案】C

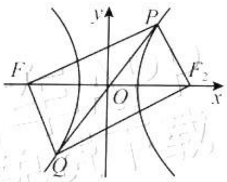
2.【答案】A【解析】由题设命题为真，即 $a \le \frac{1}{2}x^2$ 在 $x\in[-4,2]$ 上恒成立，所以 $a \le (\frac{1}{2}x^2)_{\min}=0$，充分不必要条件应该是 $(-\infty,0]$ 的一个真子集，故选 A.

3.【答案】C【解析】由题意知：S_2，S_4-S_2，S_6-S_4 成等比数列，$\therefore (S_4-4)^2=4(364-S_4)$，解得：$S_4=40$ 或 $S_4=-36$；$\because S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=S_2+a_1q^2+a_2q^2=S_2(1+q^2)=4(1+q^2)>0$，$\therefore S_4=40$.

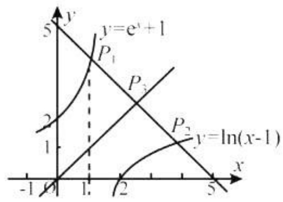
4.【答案】B【解析】由 $CA=CB=2, AC\perp BC$，所以 ΔABC 的外接圆直径 $2r=2\sqrt{2}$，由于 $PA\perp$ 底面 ABC，所以外接球的直径 $2R=2\sqrt{3}$，所以外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$.

5.【答案】A【解析】由 $\tan 135^\circ=\frac{2\tan 67.5^\circ}{1-\tan^2 67.5^\circ}=-1$，得 $2\tan 67.5^\circ=-1+\tan^2 67.5^\circ$，即 $(\tan 67.5^\circ-1)^2=2$，又 $\tan 67.5^\circ>\tan 45^\circ=1$，所以 $\tan 67.5^\circ-1=\sqrt{2}$.

6.【答案】B【解析】如图，若 P 在第一象限，因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{QF_1}=0$，所以 $PF_1\perp QF_1$，由图形的对称性知四边形 PF_1QF_2 为矩形，因为 ΔPF_2Q 的面积为 $4a^2$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=8a^2$，因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $|PF_1|=4a, |PF_2|=2a$，在 $\mathrm{Rt}\Delta PF_1F_2$ 中，$(4a)^2+(2a)^2=(2c)^2$，解得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.



7.【答案】D【解析】在同一平面直角坐标系绘制函数 $y=e^x+1, y=\ln(x-1), y=-x+5$ 的图象，由题意可知 x_1,x_2 的值分别为图中点 P_1,P_2 的横坐标，则 $e^{x_1}+1,\ln(x_2-1)$ 的值分别为图中点 P_1,P_2 的纵坐标，因为函数 $y=e^x+1$ 和 $y=\ln(x-1)$ 互为反函数，互为反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称，设直线 $y=x$ 与 $y=-x+5$ 的交点为 P_3，易知 $P_3\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$，结合对称性可知 $e^{x_1}+1+\ln(x_2-1)=2\times\frac{5}{2}=5$.



8.【答案】D【解析】$a=e^{0.8}+1, b=0.8+2, c=\ln 0.8+3$，构造函数 $y_1=e^x+1, y_2=x+2, y_3=\ln x+3$，

令 $f(x)=y_1-y_2=e^x-x-1$，$x\in(0,1)$，则 $f'(x)=e^x-1>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $f(0.8)>f(0)=0$，所以 $e^{0.8}>1.8$，所以 $e^{0.8}+1>0.8+2$，所以 $a>b$.

令 $g(x)=y_2-y_3=x-\ln x-1, x\in(0,1)$，$g'(x)=1-\frac{1}{x}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $g(0.8)>g(1)=0$，所以 $0.8-\ln 0.8-1>0$，所以 $0.8+2>\ln 0.8+3$，所以 $b>c$，所以 $a>b>c$.

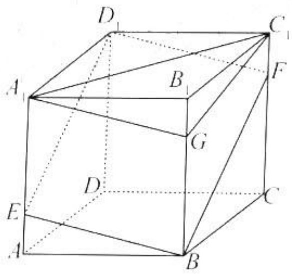
9. 【答案】ACD【解析】因为 $1+i+i^2+i^3=1+i-1-i=0$，A 正确；复数 $1+i$ 的虚部为 1，B 不正确；

令 $z_1=a+bi$，$z_2=a-bi$，$|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}$，所以 $|z_1|=|z_2|$，故 C 正确；若复数 $z=m^2-1+(m-1)i$ 为纯虚数，则 $m^2-1=0$，且 $m-1\neq 0$，即 $m=-1$，故 D 正确.

10. 【答案】BC【解析】$f(x)=2\sin\omega x(\cos\omega x-\sin\omega x)-1=2\cos\omega x\sin\omega x-2\sin^2\omega x-1=\sin 2\omega x+\cos 2\omega x-2$ $=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)-2$. 由最小正周期为 π，可得 $\pi=\frac{2\pi}{2\omega}\Rightarrow\omega=1$，故 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-2$，

对于 A，$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-2=-2$. 故 A 错误；对于 B，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\subseteq\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，此时 $f(x)$ 单调递减，故 B 正确；对于 C，$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-2=-2\Rightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$，所以 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi\Rightarrow x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，当 $x\in\left[0,\frac{5\pi}{2}\right]$ 时，满足要求的有 $\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8},\frac{15\pi}{8},\frac{19\pi}{8}$，共有 5 个零点，故 C 正确；对于 D，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，则 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故 $f(x)\in\left[-3,\sqrt{2}-2\right]$，所以 D 错误.

11. 【答案】BC【解析】如图，连接 ED_1，D_1F，由题易得 $BE \underline{\mathbin{/\!/}} D_1F$，且平面 $BEF\cap$ 平面 $DD_1C_1C=D_1F$，平面 $BEF\cap$ 平面 $AA_1D_1D=ED_1$，取 BB_1 上靠近 B_1 的四等分点 G，连接 A_1G,C_1G,A_1C_1，则 $A_1G//EB$，$A_1G\not\subset$ 平面BEF，$EB\subset$ 平面BEF，所以 $A_1G//$平面BEF. 由题知 $MA_1//$平面BEF，所以点 M 的轨迹为线段 A_1G. 由 $A_1G=C_1G$，在等腰 ΔA_1C_1G 中，当 $MC_1\perp A_1G$ 时线段 MC_1 的长度最小，且 $|MC_1|<|C_1G|=\sqrt{17}$，故 A 错误；



对于 B，$\because S_{\Delta C_1D_1D}$ 为定值，M 到平面 C_1D_1D 的距离等于 A_1 平面 C_1D_1D 的距离，即 A_1D_1，由等体积法，

$\therefore V_{C_1-MDD_1}=V_{M-C_1D_1D}=\frac{1}{3}S_{\Delta C_1D_1D}\cdot A_1D_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times 4\times 4=\frac{32}{3}$，故三棱锥 C_1-MDD_1 的体积为定值，B 正确；

对于 C，易得 $DE//B_1F$，$DE\not\subset$ 平面B_1D_1F，$B_1F\subset$ 平面B_1D_1F，故 $DE//$ 平面 B_1D_1F，C 正确；

对于 D，易得 $EF=6$，点 F 到平面 ABB_1A_1 的距离为 4，故直线 EF 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，D 错误.

12. 【答案】ABC【解析】对于 A，由已知可得，$\frac{4}{9}+\frac{2}{b^2}<1$，所以 $b^2>\frac{18}{5}$，则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

故A正确；

对于B，由$\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}=\vec{0}$可知，点$M$为原点，显然原点不在椭圆上，故B正确；

对于C，由已知$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$时，$a=3$，所以$c=\frac{3}{2}$，$F_2\left(\frac{3}{2},0\right)$.又$N\left(2,\sqrt{2}\right)$，则$|NF_2|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(0-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$.

根据椭圆的定义可得$|MF_1|+|MF_2|=2a=6$，所以$|MF_1|+|MN|=6-|MF_2|+|MN|\le 6+|NF_2|=\frac{15}{2}$，当且仅当$M,N,F_2$三点共线时，取得等号.$|MF_1|+|MN|$的最大值为$\frac{15}{2}$，故C正确；

对于D，因为$|MF_1|+|MF_2|=6$.所以

$$\frac{1}{|MF_1|}+\frac{1}{|MF_2|}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{|MF_1|}+\frac{1}{|MF_2|}\right)\left(|MF_1|+|MF_2|\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{|MF_2|}{|MF_1|}+\frac{|MF_1|}{|MF_2|}+2\right)\ge\frac{1}{6}\left(2\sqrt{\frac{|MF_2|}{|MF_1|}\cdot\frac{|MF_1|}{|MF_2|}}+2\right)=\frac{2}{3}$$，当且仅

当$\frac{|MF_2|}{|MF_1|}=\frac{|MF_1|}{|MF_2|}$，即$|MF_1|=|MF_2|=3$时，等号成立.所以，$\frac{1}{|MF_1|}+\frac{1}{|MF_2|}$的最小值为$\frac{2}{3}$，故D错误.

13.【答案】$\sqrt{13}$【解析】$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{6}=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，则

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2^2+2\times2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\sqrt{3}\right)^2=13$，即$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$.

14.【答案】4093【解析】由题意知，$X\sim N(400,5^2)$，

所以$P(395<X<405)=0.6827,P(390<X<410)=0.9545$，得

$P(390<X<405)=P(390<X<410)-P(405<X<410)$

$=P(390<X<410)-\frac{1}{2}[P(390<X<410)-P(395<X<405)]=0.9545-\frac{1}{2}(0.9545-0.6827)=0.8186$，

所以袋装质量在区间$(390,405)$的约有$5000\times0.8186=4093$袋.

15.【答案】$\frac{2}{3}$【解析】①若三地分配人数分别为1,1,3时，共有$\frac{C_5^1C_4^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=60$种安排方法；其中小赵去北京的安排方法有$C_4^1A_2^2+C_4^2A_2^2=20$种；②若三地分配人数分别为1,2,2时，共有$\frac{C_5^1C_4^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=90$种安排方法；其中小赵去北京的安排方法有$C_4^2+C_4^1C_3^2A_2^2=30$种；故小赵不去北京的概率为$1-\frac{20+30}{60+90}=\frac{2}{3}$.

16.【答案】$(-\frac{8}{e^2},0)$【解析】由题意可得$f'(x)=(x+1)e^x$，设切点坐标为(x_0,y_0)，则切线斜率$k=(x_0+1)\cdot e^{x_0}$，

所以切线方程为$y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)\cdot e^{x_0}(x-x_0)$，将$P(4,m)$代入得$m=\left(-x_0^2+4x_0+4\right)\cdot e^{x_0}$.因为存在三条切线，

即方程$m=\left(-x^2+4x+4\right)\cdot e^x$有三个不等实数根，等价于函数$y=\left(-x^2+4x+4\right)e^x$与$y=m$的图象有三个交点，

设$g(x)=(-x^2+4x+4)e^x$，则$g'(x)=-(x-4)(x+2)e^x$，当$x\in(-2,4)$时，$g'(x)>0, g(x)$单调递增；在$(-\infty,-2)$和$(4,+\infty)$上，$g'(x)<0, g(x)$单调递减，$g(-2)=-\frac{8}{e^2}$，$g(4)=4e^4$，当$x<2-2\sqrt{2}$或$x>2+2\sqrt{2}$时，$g(x)<0$，要使函数$y=(-x^2+4x+4)e^x$与$y=m$的图象有三个交点，只需$g(-2)<m<0$，即$-\frac{8}{e^2}<m<0$，即m的取值范围是$(-\frac{8}{e^2},0)$.

17.【解析】（1）由$6S_n=(a_n+2)(a_n+1)$，可得$6S_{n+1}=(a_{n+1}+2)(a_{n+1}+1)$，

两式相减可得：$6a_{n+1}=(a_{n+1}+1)(a_{n+1}+2)-(a_n+1)(a_n+2)$，……1分

化简可得$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$，

由正项数列$\{a_n\}$知 $a_{n+1}+a_n>0$，所以$a_{n+1}-a_n=3$，……3分

又$6S_1=(a_1+2)(a_1+1)$，解得$a_1=2$，……4分

所以$\{a_n\}$是以2为首项，3为公差的等差数列，

故$a_n=2+3(n-1)=3n-1$.……5分

（2）证明：由（1）可得$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(2+3n-1)}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$，……6分

所以，$\frac{1}{S_n+n}=\frac{1}{\frac{3n^2+3n}{2}}=\frac{2}{3n(n+1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，……8分

因此，$\frac{1}{S_1+1}+\frac{1}{S_2+2}+\cdots+\frac{1}{S_n+n}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{2}{3}$……10分

18.【解析】（1）在ΔABE中，由正弦定理得$\sin\angle AEB=\frac{AB\sin A}{BE}=\frac{2\times\sin 135}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

又$\angle AEB<\angle A$，则$\angle AEB=30°$，……2分

于是$\angle ABE=180°-135°-30°=15°$，

因为BE为角平分线， 所以$\angle DBE=15°$，所以$\angle BDE=15°$，所以$BE=DE=2\sqrt{2}$，……4分

在ΔBDE中，根据余弦定理得$BD^2=(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\cos150°=16+8\sqrt{3}$，

$\therefore BD=2\sqrt{3}+2$.……6分

（2）令$BC=m$，$CD=n$，在ΔBCD中，

由余弦定理得$4(\sqrt{3}+1)^2=m^2+n^2-2mn\cos60°=(m+n)^2-3mn$，……8分

即有$(m+n)^2=16+8\sqrt{3}+3mn\le 16+8\sqrt{3}+3\times\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$，即$\frac{(m+n)^2}{4}\le 16+8\sqrt{3}$，

$\therefore m+n\le 4\left(\sqrt{3}+1\right)$，……………………………………………………10 分

当且仅当$m=n=2\left(\sqrt{3}+1\right)$时，“=”成立．……………………………………11 分

所以ΔBCD周长的最大值为$6+6\sqrt{3}$ ……………………………………………12 分

19．【解析】（1）设每箱这种水果能在该超市销售为事件A，则$P(A)=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

即每箱这种水果能在该超市销售的概率为$\frac{1}{2}$．……………………………………4 分

（2）X的所有可能取值为 1200，800，400，0，-400．………………………………5 分

因为$P(X=1200)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$，$P(X=800)=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(X=400)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

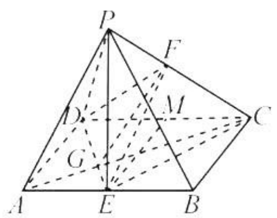
$P(X=0)=C_4^3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$，$P(X=-400)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$，……………………10 分

所以X的分布列为

X	1200	800	400	0	-400
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

所以$E(X)=1200\times\frac{1}{16}+800\times\frac{1}{4}+400\times\frac{3}{8}+0\times\frac{1}{4}-400\times\frac{1}{16}=400$．……………………12 分

20．【解析】（1）连接AC，交DE于点G，连接FG；



$\because PA//$平面DEF，$PA\subset$平面PAC，平面$PAC\cap$平面$DEF=FG$，

$\therefore PA//FG$，……………………………………2 分

$\therefore PF:PC=AG:AC$；

$\because AB//CD$，$\therefore AG:GC=AE:CD=1:2$，$\therefore AG:AC=1:3$，

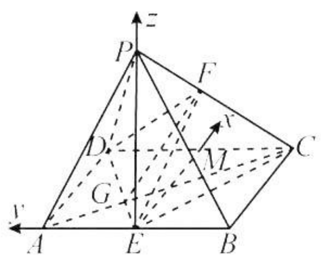
$\therefore \frac{PF}{PC}=\frac{1}{3}$，即$\frac{PF}{PC}$的值为$\frac{1}{3}$ ……………………………………4 分

（2）取CD中点M，连接EM；

$\because$四边形$ABCD$为矩形，$AE \underline{\underline{//}} DM$ $\therefore EM\perp AE$，……………………5 分

以E为坐标原点，$\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EP}$分别为$x,y,z$轴，

建立如图所示空间直角坐标系，



$\because AB=2AD=2$，$\therefore DE=CE=\sqrt{2}$，$\therefore ED\perp EC$；

$\because PE\perp$ 平面 $ABCD$，$EC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PE\perp EC$；

$\because PE,DE\subset$ 平面 PDE，$PE\cap DE=E$，$\therefore CE\perp$ 平面 PDE；……7 分

设 $PE=a(a>0)$，

则 $P(0,0,a)$，$D(1,1,0)$，$E(0,0,0)$，$C(1,-1,0)$，$F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{a}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{ED}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{EC}=(1,-1,0)$，

设平面 DEF 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{ED}\cdot\vec{n}=x+y=0\\ \overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{a}{2}z=0\end{cases}$，令 $z=-2$，则 $x=a$，$y=-a$，$\therefore \vec{n}=(a,-a,-2)$；

又平面 PDE 的一个法向量为 $\overrightarrow{EC}=(1,-1,0)$，

$\therefore \left|\cos<\overrightarrow{EC},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{EC}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{2a}{\sqrt{2}\times\sqrt{2a^2+4}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，解得：$a=\sqrt{3}$；……10 分

$\therefore \overrightarrow{PD}=(1,1,-\sqrt{3})$，$\vec{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},-2)$，$\therefore \left|\cos<\overrightarrow{PD},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PD}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{6}}{5}$.

$\therefore$ 直线 PD 与平面 DEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{5}$……12 分

21. 【解析】(1) A 点坐标代入抛物线方程得 $16=4p$，$\therefore p=4$，……2 分

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=8x$. ……4 分

(2) 证明：设 PQ：$x=my+t$，将 PQ 的方程与 $y^2=8x$ 联立得 $y^2-8my-8t=0$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-8t$，

所以 $\Delta>0\Rightarrow 64m^2+32t>0\Rightarrow 2m^2+t>0$，……6 分

$k_{PA}=\frac{y_1-4}{x_1-2}=\frac{y_1-4}{\frac{y_1^2}{8}-2}=\frac{8}{y_1+4}$，同理：$k_{QA}=\frac{8}{y_2+4}$，……8 分

由题意：$\frac{8}{y_1+4}+\frac{8}{y_2+4}=4$，

$\therefore 2(y_1+y_2)=y_1y_2+4(y_1+y_2)$，

$\therefore y_1y_2=-2(y_1+y_2)$，即 $t=2m$，

代入直线得 $x=my+2m=m(y+2)$，……10 分

故直线 PQ 恒过定点 $(0,-2)$. ……12 分

22. 【解析】(1) $f(1)=e^2-a$，又 $f'(x)=(1+2x)e^{2x}-3ax^2$，……1 分

所以 $f'(1)=3e^2-3a$，

则曲线 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线 l 的方程为 $y-(e^2-a)=(3e^2-3a)(x-1)$，........................3 分

令 $y=0$ 得 $x=1-\dfrac{e^2-a}{3e^2-3a}=\dfrac{2}{3}$，故切线在 x 轴上的截距为 $\dfrac{2}{3}$ ....4 分

（2）要证函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的零点 x_1,x_2，需证方程 $e^{2x}-ax^2=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的实数解，即证方程 $\dfrac{e^x}{x}-\sqrt{a}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的实数解..5 分

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}-\sqrt{a}\,(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$， ....6 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $g(1)=e-\sqrt{a}<0, g\left(\dfrac{1}{5}\right)=5e^{\frac{1}{5}}-\sqrt{a}>0$，所以存在 $x_1\in(0,1)$，使得 $g(x_1)=0$；

又 $g(2)=\dfrac{e^2}{2}-\sqrt{a}<0, g(5)=\dfrac{e^5}{5}-\sqrt{a}>0$，所以存在 $x_2\in(2,5)$，使得 $g(x_2)=0$.

故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的零点 x_1,x_2 ....8 分

由上易知 $\sqrt{a}x_1=e^{x_1},\sqrt{a}x_2=e^{x_2}$，

两式相加得 $\sqrt{a}(x_1+x_2)=e^{x_1}+e^{x_2}$，

两式相减得 $\sqrt{a}(x_2-x_1)=e^{x_2}-e^{x_1}$，

所以 $\sqrt{a}=\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}}{x_1+x_2}=\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$，..9分

则 $x_1+x_2=\dfrac{(x_2-x_1)(e^{x_1}+e^{x_2})}{e^{x_2}-e^{x_1}}=\dfrac{(x_2-x_1)(1+e^{x_2-x_1})}{e^{x_2-x_1}-1}=x_2-x_1+\dfrac{2(x_2-x_1)}{e^{x_2-x_1}-1}$ 10分

令 $t=x_2-x_1$，则 $t>1$，

所以 $nx_1-x_2=\dfrac{n-1}{2}(x_1+x_2)-\dfrac{n+1}{2}(x_2-x_1)=\dfrac{n-1}{2}\left(t+\dfrac{2t}{e^t-1}\right)-\dfrac{n+1}{2}t=\dfrac{(n-1)t}{e^t-1}-t$，

设 $h(t)=\dfrac{(n-1)t}{e^t-1}-t\,(t>1)$，

则$h'(t)=\dfrac{(n-1)\left[(1-t)e^t-1\right]}{(e^t-1)^2}-1<0$，

所以$h(t)$在上单调递减$(1,+\infty)$上单调递减，

则$h(t)<h(1)=\dfrac{n-1}{e-1}-1=\dfrac{n-e}{e-1}$，

故当$x_1<x_2$时，

$nx_1-x_2<\dfrac{n-e}{e-1},(n\ge 2,n\in N)$……………………………………12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。