

沧州市高一年级 2022—2023 学年(下)教学质量监测

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 B

命题意图 本题考查复数的基本运算.

解析  $z = \frac{4-2i}{i} = -2-4i$ , 所以  $|z| = 2\sqrt{5}$ .

2. 答案 C

命题意图 本题考查样本的平均数和中位数.

解析 由题意得  $\frac{\alpha+5+6+7+7+8+11+12}{8} = 8$ , 解得  $\alpha = 8$ , 故这组数据的中位数为  $\frac{7+8}{2} = 7.5$ .

3. 答案 A

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算.

解析  $a+2b = (6, 2\lambda+4)$ ,  $2a+b = (6, \lambda+8)$ , 且  $(a+2b) \parallel (2a+b)$ ,  $\therefore 6 \times (\lambda+8) - (2\lambda+4) \times 6 = 0$ , 解得  $\lambda = 4$ .

4. 答案 C

命题意图 本题考查空间位置关系的判断.

解析 对于①, 垂直于同一条直线的两个平面平行, 所以①正确; 对于②, 若  $m \perp \beta$ ,  $\alpha \perp \beta$ , 则  $m \subset \alpha$  或  $m \parallel \alpha$ , 所以②错误; 对于③,  $\beta$  可能与  $\alpha$  相交, 故③错误; 对于④,  $\alpha \cap \beta = l$ ,  $m \parallel l$ , 则  $m$  至少与  $\alpha, \beta$  中的一个平行, 故④正确.

5. 答案 A

命题意图 本题考查与复数有关的新定义问题.

解析 由题意可知,  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4 = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^4 = (e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ .

6. 答案 B

命题意图 本题考查圆台的结构特征及相关计算.

解析 设圆台的上底面半径为  $r$ , 下底面半径为  $R$ , 则  $2\pi r = 2\pi$ ,  $2\pi R = 6\pi$ , 所以  $r = 1$ ,  $R = 3$ , 且圆台的母线长为  $6 - 2 = 4$ , 圆台的高为  $\sqrt{4^2 - (3-1)^2} = 2\sqrt{3}$ . 所以圆台的体积为  $\frac{1}{3}\pi \times (1^2 + 3^2 + 3) \times 2\sqrt{3} = \frac{26\sqrt{3}}{3}\pi$ .

7. 答案 D

命题意图 本题考查相互独立事件的概率计算.

解析 甲班最终获胜有三种情况: ①甲班前两场获胜; ②甲班第 1 场和第 3 场获胜, 第 2 场输; ③甲班第 1 场输, 第 2 场和第 3 场获胜. 故甲班最终获胜的概率为  $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{81}{125}$ .

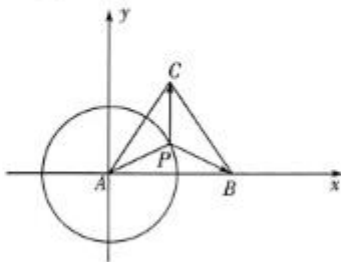
8. 答案 C

命题意图 本题考查三角形与平面向量的综合.

— 1 —



解析  $\because A, B, C \in (0, \pi), \therefore A - B \in (-\pi, \pi), B - C \in (-\pi, \pi), C - A \in (-\pi, \pi)$ , 可得  $\cos(A - B) \in (-1, 1], \cos(B - C) \in (-1, 1], \cos(C - A) \in (-1, 1]$ , 若  $\cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A) = 1$ , 则  $\cos(A - B) = 1, \cos(B - C) = 1, \cos(C - A) = 1$ , 可得  $A - B = 0, B - C = 0, C - A = 0$ , 即  $A = B = C$ , 即  $\triangle ABC$  是等边三角形. 如图所示, 以  $A$  为坐标原点,  $AB$  所在直线为  $x$  轴建立平面直角坐标系,  $\because AB = 2, \therefore B(2, 0), C(1, \sqrt{3})$ . 由题意设  $P(\cos \theta, \sin \theta) (0 \leq \theta < 2\pi)$ , 则  $\overrightarrow{PB} = (2 - \cos \theta, -\sin \theta), \overrightarrow{PC} = (1 - \cos \theta, \sqrt{3} - \sin \theta), \therefore \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = (2 - \cos \theta)(1 - \cos \theta) - \sin \theta(\sqrt{3} - \sin \theta) = 2 - 3\cos \theta + \cos^2 \theta - \sqrt{3}\sin \theta + \sin^2 \theta = 3 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ .  $\because 0 \leq \theta < 2\pi, \therefore -\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{6}$ ,  $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 1]$ , 可得  $3 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \in [3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}]$ .



二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 答案 AC

命题意图 本题考查复数的综合运算.

解析 对于A,若  $z_1 = \bar{z}_2$ , 则  $z_1$  和  $z_2$  互为共轭复数,所以  $\bar{z}_1 = z_2$ , 故A正确;

对于B,若  $z_1 + z_2 \in \mathbf{R}$ , 则  $z_1$  与  $z_2$  的虚部互为相反数,故B错误;

对于C,若  $z_1 z_2 = 0$ , 则  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 0$ , 所以  $|z_1| = 0$  或  $|z_2| = 0$ , 可得  $z_1 = 0$  或  $z_2 = 0$ , 故C正确;

对于D,取  $z_1 = 1, z_2 = i$ , 可得  $z_1^2 + z_2^2 = 1 - 1 = 0$ , 故D错误.

10. 答案 BCD

命题意图 本题考查统计的综合问题.

解析 对于A,由图可知  $10 \times (x + 0.015 + 0.02 + 0.03 + 0.025) = 1$ , 解得  $x = 0.01$ , 故A错误;

对于B,因为成绩在  $[50, 80)$  内对应的频率为  $0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45 < 0.6$ , 成绩在  $[50, 90)$  内对应的频率为

$0.1 + 0.15 + 0.2 + 0.3 = 0.75 > 0.6$ , 所以第60百分位数位于区间  $[80, 90)$  内, 设为  $m$ , 则  $m = 80 + \frac{0.6 - 0.45}{0.3} \times$

$(90 - 80) = 85$ , 所以估计样本数据的第60百分位数约为85, 故B正确;

对于C,平均数约为  $\bar{x} = 55 \times 0.1 + 65 \times 0.15 + 75 \times 0.2 + 85 \times 0.3 + 95 \times 0.25 = 79.5$ , 故C正确;

对于D,成绩低于80分的三组学生的人数之比为  $0.1 : 0.15 : 0.2 = 2 : 3 : 4$ , 则应选取成绩在  $[60, 70)$  内的学生

人数为  $30 \times \frac{3}{2+3+4} = 10$ , 故D正确.

11. 答案 BD

命题意图 本题考查平面向量的应用.

解析 对于A,由已知可得  $b = 2a + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ , 在正方形  $ABCD$  中可得  $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$ , 故A错误;

对于B,  $a \cdot b = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$ , 故B正确;

对于 C,  $a$  在  $b$  上的投影向量的模为  $\frac{|a \cdot b|}{|b|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 故 C 错误;

对于 D,  $(b - 4a) \cdot b = b^2 - 4a \cdot b = 0$ , 又  $b - 4a$  与  $b$  均不是零向量, 所以  $(b - 4a) \perp b$ , 故 D 正确.

12. 答案 ACD

命题意图 本题考查立体几何中的相关计算.

解析 对于 A, 由已知得  $AA_1 \perp$  平面  $ABP$ ,  $PB \subset$  平面  $ABP$ , 所以  $AA_1 \perp PB$ , 又因为  $AB$  是底面圆的直径,  $P$  在圆周上, 所以  $BP \perp AP$ , 又  $A_1A \cap AP = A$ , 所以  $PB \perp$  平面  $A_1AP$ , 故 A 正确;

对于 B, 因为  $AA_1 \perp$  平面  $ABP$ , 所以直线  $A_1P$  与平面  $ABP$  所成的角为  $\angle A_1PA$ , 计算易得  $\angle PAO = 30^\circ$ , 所以  $PB = 1$ ,  $PA = \sqrt{3}$ ,  $AA_1 = 3$ , 故  $\tan \angle A_1PA = \frac{AA_1}{AP} = \sqrt{3}$ , 故直线  $A_1P$  与平面  $ABP$  所成的角的正切值为  $\sqrt{3}$ , 故 B 错误;

对于 C, 连接  $B_1P$ , 由已知得  $AB \parallel A_1B_1$ , 所以直线  $A_1P$  与直线  $AB$  所成的角为  $\angle B_1A_1P$ , 在  $\triangle A_1B_1P$  中,  $A_1P = \sqrt{AP^2 + A_1A^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$ ,  $B_1P = \sqrt{BP^2 + B_1B^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ , 所以  $\cos \angle B_1A_1P = \frac{2^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{10})^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 故 C 正确;

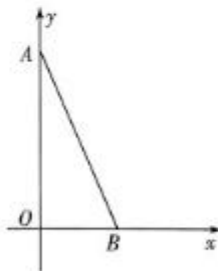
对于 D, 设点  $A$  到平面  $A_1PB$  的距离为  $h$ , 则  $V_{A-A_1PB} = V_{A_1-APB}$ , 即  $\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1PB} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle APB} \cdot AA_1$ , 又  $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} AP \cdot BP = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $S_{\triangle A_1PB} = \frac{1}{2} A_1P \cdot PB = \sqrt{3}$ , 所以  $h = \frac{3}{2}$ , 故 D 正确.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 答案  $\sqrt{2}$

命题意图 本题考查斜二测画法的基本概念.

解析 根据题意可得  $O'A' = \sqrt{2}$ , 在  $\triangle ABO$  中,  $OB = O'B' = 1$ ,  $OA = 2O'A' = 2\sqrt{2}$ , 所以  $\triangle ABO$  的面积为  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ .



14. 答案  $\frac{3}{10}$

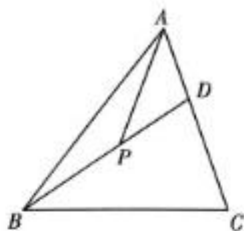
命题意图 本题考查古典概型的概率计算.

解析 不考虑顺序, 列举可得总的样本点的个数为 10, 事件“他们加入的都是球类运动社团”包含的样本点有 3 个, 故所求概率为  $\frac{3}{10}$ .

15. 答案  $(-1, \frac{1}{3})$

命题意图 本题考查平面向量的性质.

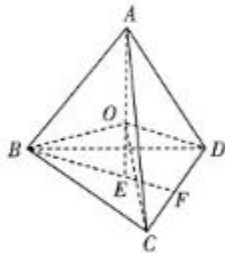
解析 如图,  $\because \vec{DC} = 2\vec{AD}, \therefore \vec{AC} = 3\vec{AD}, \therefore \vec{AP} = x\vec{AB} + 3y\vec{AD}, \therefore B, P, D$  三点共线,  $\therefore x + 3y = 1, \therefore x > 0, \therefore y = \frac{1}{3}(1-x) < \frac{1}{3}, \therefore 0 < y < \frac{1}{3}, \therefore y-x = y - (1-3y) = 4y-1 \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ .



16. 答案  $\frac{\pi}{3}a^2$

命题意图 本题考查多面体与球相切的有关计算问题.

解析 如图所示, 设  $O$  为大球的球心, 大球的半径为  $R$ , 大正四面体的底面中心为  $E$ , 棱长为  $a$ , 高为  $h$ ,  $CD$  的中点为  $F$ , 连接  $OA, OB, OC, OD, OE, BF$ , 则  $BE = \frac{2}{3}BF = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ , 正四面体的高  $h = AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ . 因为  $V_{正四面体} = 4V_{O-ABC}$ , 所以  $\frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} h = 4 \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times R$ , 所以  $R = \frac{1}{4}h = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ . 设小球的半径为  $r$ , 小球也可看作一个小的正四面体的内切球, 且小正四面体的高  $h_{小} = h - 2R = \frac{\sqrt{6}}{6}a$ , 所以  $r = \frac{1}{4}h_{小} = \frac{\sqrt{6}}{24}a = \frac{R}{2}$ . 故该模型中 5 个球的表面积之和为  $4\pi R^2 + 4 \times 4\pi r^2 = 8\pi R^2 = 8\pi \times \frac{6}{144}a^2 = \frac{\pi}{3}a^2$ .



四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 命题意图 本题考查复数的运算和几何意义.

解析 (I) 由  $z + 5i = m + (9 - m^2)i$  为实数, 可得  $9 - m^2 = 0$ , ..... (2 分)

解得  $m = \pm 3$ , 因为  $m > 0$ , 所以  $m = 3$ . ..... (3 分)

所以  $z = 3 - 5i$ . ..... (4 分)

(II) 由 (I) 可知  $\bar{z} = 3 + 5i$ , ..... (6 分)

所以  $z_1 = \bar{z}(a + i) = (3 + 5i)(a + i) = (3a - 5) + (5a + 3)i$ , ..... (7 分)

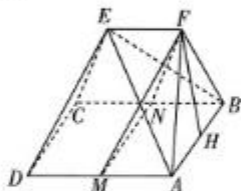
因为  $z_1$  在复平面内对应的点在第二象限,

所以  $\begin{cases} 3a - 5 < 0, \\ 5a + 3 > 0, \end{cases}$  ..... (8 分)

解得  $-\frac{3}{5} < a < \frac{5}{3}$ , 即实数  $a$  的取值范围为  $\left(-\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right)$ . ..... (10 分)

18. 命题意图 本题考查面面平行的证明以及棱锥体积的计算.

解析 (I) 因为  $EF \parallel AD, EF = \frac{1}{2}AD = 2, M$  是  $AD$  的中点,  
 所以  $EF \parallel DM$ , 且  $EF = DM$ , 所以四边形  $DEFM$  是平行四边形, 从而  $MF \parallel DE$ . ..... (2分)  
 因为  $MF \not\subset$  平面  $ECD, DE \subset$  平面  $ECD$ , 所以  $MF \parallel$  平面  $ECD$ . ..... (4分)  
 同理  $NF \parallel$  平面  $ECD$ ,  
 又  $MF \cap NF = F$ , 所以平面  $NMF \parallel$  平面  $ECD$ . ..... (6分)  
 (II) 设  $AB$  的中点为  $H$ , 连接  $FH$ , 则  $FH \perp AB$ .



因为平面  $ABF \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $ABF \cap$  平面  $ABCD = AB, FH \subset$  平面  $ABF$ , 所以  $FH \perp$  平面  $ABCD$ , ..... (7分)  
 因为  $EF \parallel AD, EF \not\subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $EF \parallel$  平面  $ABCD$ , ..... (8分)  
 所以  $E$  到平面  $ABCD$  的距离为  $FH = 2\sqrt{3}$ , ..... (10分)  
 所以  $V_{E-ABCD} = \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 2\sqrt{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$ . ..... (12分)

19. 命题意图 本题考查平均数与方差的计算.

解析 (I) 由题意知  $\frac{1}{5}(90 + 110 + x + y + 150) = 110$ , 则  $x + y = 200$ . ..... (2分)  
 因为  $x < y$ , 所以  $x < 100 < y$ . ..... (3分)  
 从这 5 天中任选 2 天, 所有的结果为  $(90, 110), (90, x), (90, y), (90, 150), (110, x), (110, y), (110, 150), (x, y), (x, 150), (y, 150)$ , 共 10 种, ..... (5分)  
 这 2 天的空气质量均为优良的结果为  $(90, x)$ , 只有 1 种, ..... (6分)  
 故所求的概率为  $P = \frac{1}{10}$ . ..... (7分)

(II) 方差  $s^2 = \frac{1}{5} \times [(90 - 110)^2 + (110 - 110)^2 + (x - 110)^2 + (y - 110)^2 + (150 - 110)^2]$   
 $= \frac{1}{5} [2000 + (x - 110)^2 + (90 - x)^2] = \frac{2}{5} (x - 100)^2 + 440$ , ..... (10分)  
 因为  $90 < x < 150$ , 所以当  $x = 100$  时,  $s^2$  的值最小, 最小值为 440. ..... (12分)

20. 命题意图 本题考查正、余弦定理的应用.

解析 (I) 由  $\frac{a-b+c}{c} = \frac{b}{a+b-c}$  整理可得  $bc = b^2 + c^2 - a^2$ , ..... (1分)  
 由余弦定理可得  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$ , ..... (3分)  
 又  $0 < A < \pi$ ,  $\therefore A = \frac{\pi}{3}$ . ..... (5分)

(II) 由  $b - c = \frac{\sqrt{3}}{3}a$  及正弦定理, 可得  $\sin B - \sin C = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A = \frac{1}{2}$ , ..... (7分)  
 $\therefore \sin B - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = \sin B - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B - \frac{1}{2} \sin B = \frac{1}{2} \sin B - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B = \sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ , ..... (10分)

$$\therefore B \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \therefore B - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \therefore B - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}, \dots\dots\dots (11 \text{分})$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{2}, \text{即} \triangle ABC \text{是直角三角形.} \dots\dots\dots (12 \text{分})$$

21. 命题意图 本题考查空间几何体的结构特征以及相关计算.

解析 (I)  $\because OO_1 = 5 \text{ dm}, \therefore PO_1 = 2 \text{ dm.} \dots\dots\dots (2 \text{分})$

$$\therefore \text{玻璃罩的容积 } V = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 2 + 6^2 \times 5 = 24 + 180 = 204 (\text{dm}^3) = 204 (\text{L}). \dots\dots\dots (4 \text{分})$$

(II) 连接  $A_1O_1$ , 设  $PO_1 = x \text{ dm} (0 < x < 4)$ ,

$$\text{则 } O_1O = \frac{5}{2}x \text{ dm}, A_1O_1 = \sqrt{16 - x^2} \text{ dm}, A_1B_1 = \sqrt{2} \sqrt{16 - x^2} \text{ dm}, \dots\dots\dots (6 \text{分})$$

$$\therefore \text{正四棱柱的侧面积 } S = 4 \cdot \frac{5}{2}x \cdot \sqrt{2} \sqrt{16 - x^2} = 10\sqrt{2} \sqrt{(16 - x^2)x^2}. \dots\dots\dots (8 \text{分})$$

$$\therefore S \leq 10\sqrt{2} \times \frac{x^2 + 16 - x^2}{2} = 80\sqrt{2}, \dots\dots\dots (10 \text{分})$$

当且仅当  $x = \sqrt{16 - x^2}$ , 即  $x = 2\sqrt{2}$  时, 取等号.  $\dots\dots\dots (11 \text{分})$

$\therefore$  当  $PO_1 = 2\sqrt{2} \text{ dm}$  时, 正四棱柱侧面积最大, 最大为  $80\sqrt{2} \text{ dm}^2$ .  $\dots\dots\dots (12 \text{分})$

22. 命题意图 本题考查频率分布直方图和频数分布表, 相互独立事件的概率计算.

解析 (I) 由频率分布直方图得学生对 A 餐厅的评分在  $[30, 50)$  的频率为  $(0.02 + 0.02) \times 10 = 0.4$ ,  
 $\dots\dots\dots (2 \text{分})$

即学生对 A 餐厅的满意度指数为 2 的频率为 0.4,

所以对 A 餐厅的满意度指数为 2 的人数为  $200 \times 0.4 = 80$ .  $\dots\dots\dots (4 \text{分})$

(II) 设“对 A 餐厅的满意度指数比对 B 餐厅的满意度指数低”为事件 M.

记“对 A 餐厅的满意度指数为 1”为事件  $A_1$ , “对 A 餐厅的满意度指数为 2”为事件  $A_2$ , “对 B 餐厅的满意度指数为 2”为事件  $B_2$ , “对 B 餐厅的满意度指数为 3”为事件  $B_3$ ,

$$\text{则 } P(A_1) = (0.003 + 0.005 + 0.012) \times 10 = 0.2, P(A_2) = 0.4,$$

$$P(B_2) = \frac{30 + 80}{200} = 0.55, P(B_3) = \frac{70}{200} = 0.35. \dots\dots\dots (7 \text{分})$$

因为他对 A, B 餐厅的评分互不影响,

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(M) &= P(A_1B_2 + A_1\bar{B}_2 + A_2B_3) \\ &= P(A_1)P(B_2) + P(A_1)P(\bar{B}_2) + P(A_2)P(B_3) \\ &= 0.2 \times 0.55 + 0.2 \times 0.35 + 0.4 \times 0.35 \\ &= 0.32. \dots\dots\dots (12 \text{分}) \end{aligned}$$

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服

务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

