岳阳市 2023 届高三教学质量监测（二）

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. B　2. C　3. D　4. B　5. D　6. C　7. D　8. A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. AC　10. BD　11. ACD　12. CD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\sqrt{2}$　14. —10　15. $-x^3+2x^2$（答案不唯一，$m\in\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{3}\right)$均可）　16. 3，$\dfrac{4003}{45}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

解：（1）在 ΔABC 中，由 $\sqrt{3}\sin C+\cos C=\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A}$ 可得

$$\sqrt{3}\sin C\sin A+\cos C\sin A=\sin(A+C)+\sin C\Rightarrow\sqrt{3}\sin C\sin A=\cos A\sin C+\sin C$$

$\because\sin C>0,\therefore\sqrt{3}\sin A-\cos A=1\Rightarrow\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$　…………………2 分

$\because A\in(0,\pi)\therefore A-\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$

$\therefore A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow A=\dfrac{\pi}{3}$　…………………4 分

（2）$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$ 且 $A=\dfrac{\pi}{3},r=2$

$\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}bc=2(a+b+c)$ 即 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc-b-c$　…………………5 分

由余弦定理有：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow a^2=b^2+c^2-bc$ ………6 分

所以 $(\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc-b-c)^2=(b+c)^2-3bc$

于是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(b+c)-3=\dfrac{3}{16}bc\le\dfrac{3}{16}(\dfrac{b+c}{2})^2$，当且仅当 $b=c$ 时取 $=$

所以 $\sqrt{3}(b+c)^2-32(b+c)+64\sqrt{3}\geq 0 \Rightarrow b+c\geq 8\sqrt{3}$或$b+c\leq\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ ········8 分

由$r=2, A=\dfrac{p}{3}$知$b+c>2\times\dfrac{2}{\tan\dfrac{p}{6}}=4\sqrt{3}$

所以$b+c\geq 8\sqrt{3}\Rightarrow(b+c)_{\min}=8\sqrt{3}$ ····················10 分

18.（本题满分 12 分）

解：（1）由 $S_{n+1}=2S_n+2^{n+1}$ 得 $\dfrac{S_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{S_n}{2^n}+1$， ····················1 分

所以数列$\left\{\dfrac{S_n}{2^n}\right\}$是以$\dfrac{S_1}{2}=\dfrac{1}{2}$为首项，公差为 1 的等差数列····················2 分

$\therefore\dfrac{S_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)=\dfrac{2n-1}{2}$，即 $S_n=(2n-1)\cdot 2^{n-1}$ ····················3 分

$\therefore$当$n\geq 2$时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n-1)\cdot 2^{n-1}-(2n-3)\cdot 2^{n-2}=(2n+1)\cdot 2^{n-2}$ ···············5 分

又$a_1=1$不满足上式，所以$a_n=\begin{cases}1, & n=1\\(2n+1)\cdot 2^{n-2}, & n\geq 2\end{cases}$ ···············6 分

（2）由（1）知$S_n=(2n-1)\cdot 2^{n-1}$， ···················7 分

$\therefore b_n=\dfrac{(2n-1)\cdot 2^{n-1}}{3^n}=(n-\dfrac{1}{2})\cdot(\dfrac{2}{3})^n$ ··················8 分

$\therefore b_{n+1}-b_n=(n+\dfrac{1}{2})(\dfrac{2}{3})^{n+1}-(n-\dfrac{1}{2})(\dfrac{2}{3})^n=(\dfrac{5-2n}{6})(\dfrac{2}{3})^n$ ··················9 分

$\therefore$当$n\leq 2$时，$b_{n+1}>b_n$；

当$n\geq 3$时，$b_{n+1}<b_n$，即$b_1<b_2<b_3>b_4>b_5>\mathbf{L}$ ···············10 分

所以b_n的最大值为$b_3=\dfrac{20}{27}$，依题意$\dfrac{20}{27}<\dfrac{m^2-m+18}{27}$即$m^2-m-2>0$，

解得$m<-1$或$m>2$。 ···················12 分

19.（本题满分 12 分）

解：(1)证明：$\because CD\perp AD$，$CD\perp BD$，$AD\cap BD=D$，

$\therefore CD\perp$平面 ABD，$\because AB\subset$平面 ABD，$\therefore CD\perp AB$.

又∵M，E 分别为 AC，BC 的中点，

∴$ME//AB$，∴$CD\perp ME$. ……………………4 分

(2)选①，在图 1 所示的△ABC 中，由 $\tan 2B=-\dfrac{4}{3}=\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}$，

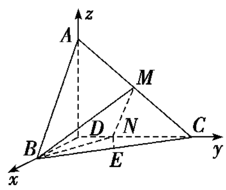
解得 $\tan B=2$ 或 $\tan B=-\dfrac{1}{2}$(舍去). ……………………5 分

设 $AD=CD=x$，在 Rt△ABD 中，$\tan B=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{x}{3-x}=2$，

解得 $x=2$，∴$BD=1$. ……………………6 分

以点 D 为原点，DB，DC，DA 分别为 x，y，z 轴建立如图所示的坐标系 D-xyz，

$D(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A(0,0,2)$，$M(0,1,1)$，$E\left(\dfrac{1}{2}，1，0\right)$，



则$\overrightarrow{BM}=(-1,1,1)$.

设 $N(0,a,0)$，则$\overrightarrow{EN}=\left(-\dfrac{1}{2}，a-1，0\right)$.

∵$EN\perp BM$，∴$\overrightarrow{EN}\cdot\overrightarrow{BM}=0$，即$\left(-\dfrac{1}{2}，a-1，0\right)\cdot(-1,1,1)=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$，

∴$N\left(0，\dfrac{1}{2}，0\right)$，∴当 $DN=\dfrac{1}{2}$(即 N 是 CD 的靠近 D 的一个四等分点)时，$EN\perp BM$.

……………………8 分

设平面 BMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，且$\overrightarrow{BN}=\left(-1，\dfrac{1}{2}，0\right)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-x+\dfrac{1}{2}y=0,\\ -x+y+z=0,\end{cases}$令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,2，-1)$.

取平面 CBN 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，……………………10 分

则$|\cos\langle\boldsymbol{m}，\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{|(0，0，1)\cdot(1，2，-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

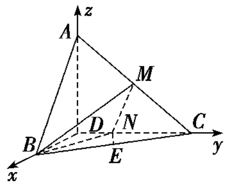
∴平面 BMN 与平面 CBN 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.……………………12 分

选②，在图 1 所示的△ABC 中，设$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，

则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，

又∵$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，由平面向量基本定理知$\lambda=\frac{1}{3}$，即 $BD=1$.

以点 D 为原点，DB，DC，DA 分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 D-xyz，



$D(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A(0,0,2)$，$M(0,1,1)$，$E\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$，

则$\overrightarrow{BM}=(-1,1,1)$.

设 $N(0,\ a,0)$，则$\overrightarrow{EN}=\left(-\frac{1}{2},\ a-1,\ 0\right)$.　　∵$EN\perp BM$，∴$\overrightarrow{EN}\cdot\overrightarrow{BM}=0$，

即$\left(-\frac{1}{2},\ a-1,\ 0\right)\cdot(-1,1,1)=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，∴$N\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，

∴当 $DN=\frac{1}{2}$(即 N 是 CD 的靠近 D 的一个四等分点)时，$EN\perp BM$.

设平面 BMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，且$\overrightarrow{BN}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$　得$\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y=0,\\ -x+y+z=0,\end{cases}$　令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,2,\ -1)$.

取平面 CBN 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

则$|\cos\langle\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|(0,\ 0,\ 1)\cdot(1,\ 2,\ -1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

∴平面 BMN 与平面 CBN 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

选③，　在图 1 所示的$\triangle ABC$ 中，设 $BD=x(0<x<3)$，则 $CD=3-x$，

∵$AD\perp BC$，$\angle ACB=45^\circ$，∴$\triangle ADC$ 为等腰直角三角形，∴$AD=CD=3-x$.

折起后 $AD\perp DC$，$AD\perp BD$，且 $BD\cap DC=D$，

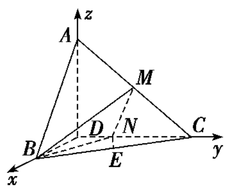
∴$AD\perp$平面 BCD，又$\angle BDC=90^\circ$，∴$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}x(3-x)$，

$V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{1}{3}(3-x)\cdot\frac{1}{2}x(3-x)=\frac{1}{6}(x^3-6x^2+9x)$，$x\in(0,3)$，

令 $f(x)=\frac{1}{6}(x^3-6x^2+9x)$，$f'(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-3)$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，

∴$x=BD=1$ 时，三棱锥 A-BCD 的体积最大.



以点 D 为原点，DB，DC，DA 分别为 x，y，z 轴建立如图所示直角坐标系 D-xyz，

$D(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A(0,0,2)$，$M(0,1,1)$，$E\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$，则$\overrightarrow{BM}=(-1,1,1)$.

设 $N(0,\ a,0)$，则$\overrightarrow{EN}=\left(-\frac{1}{2},\ a-1,\ 0\right)$.

$\because EN\perp BM$，$\therefore \overrightarrow{EN}\cdot\overrightarrow{BM}=0$，即$\left(-\frac{1}{2},\ a-1,\ 0\right)\cdot(-1,1,1)=0$，

解得 $a=\frac{1}{2}$，$\therefore N\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，

$\therefore$当 $DN=\frac{1}{2}$(即 N 是 CD 的靠近 D 的一个四等分点)时，$EN\perp BM$.

设平面 BMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，且$\overrightarrow{BN}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y=0,\\ -x+y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,2,\ -1)$.

取平面 CBN 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

则$|\cos\langle\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|(0,\ 0,\ 1)\cdot(1,\ 2,\ -1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,

$\therefore$平面 BMN 与平面 CBN 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

20.（本题满分 12 分）

解：（1）$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8}=\frac{9}{2}$，$\bar{y}=\frac{2292}{8}=\frac{573}{2}$ ························1 分

$$相关系数\ r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_iy_i-8\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{8}x_i^2-8\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^{8}y_i^2-8\bar{y}^2)}}$$

$$=\frac{12041-8\times\frac{9}{2}\times\frac{573}{2}}{\sqrt{(204-8\times\frac{81}{4})(730348-8\times\frac{328329}{4})}}=\frac{1727}{\sqrt{42}\times\sqrt{73690}}\approx\frac{1727}{20.5\times85.84}\approx0.98$$ ·········4 分

因为 y 与 x 的相关系数$r\approx0.98$，接近 1，所以 y 与 x 的线性相关程度很高，可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系。························5 分

（2）$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i-8\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2-8\overline{x}^2}$

$=\dfrac{12041-8\times\dfrac{9}{2}\times\dfrac{573}{2}}{204-8\times\dfrac{81}{4}}=\dfrac{1727}{42}\approx 41.12$ ……………………7 分

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\approx\dfrac{573}{2}-41.12\times\dfrac{9}{2}=101.46$

所以 y 与 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=41.12x+101.46$ ……………………9 分

又 2022 年对应的年份代码 x=10，当 x=10 时，$\hat{y}=41.12\times10+101.46=512.66\approx513$，

所以预测 2022 年全国生活垃圾焚烧无害化处理厂的个数为 513. ……………………10 分

（3）对于 2035 年全国生活垃圾焚烧无害化处理厂的个数，不能由（2）所求的线性回归方程预测，理由如下（说出一点即可）：……………………11 分

①线性回归方程具有时效性，不能预测较远情况；

②全国生活垃圾焚烧无害化处理厂的个数有可能达到上限，一段时间内不再新建；

③受国家政策的影响，可能产生新的生活垃圾无害化处理方式。……………………12 分

21.（本题满分 12 分）

解：(1)由△ABP 是等腰直角三角形，得 $a=2$，$B(2,0)$. ……………………1 分

设 $Q(x_0,y_0)$，则由$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{QB}$，得$\begin{cases}x_0=\dfrac{6}{5},\\ y_0=-\dfrac{4}{5},\end{cases}$ ……………………2 分

代入椭圆方程得 $b^2=1$，所以椭圆 E 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………3 分

由几何关系可知：$d_1^2+d_2^2=|MN|^2$， ……………………4 分

设 N(x，y)，则$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 且 $y\in[-1,1]$

$\therefore |MN|^2=x^2+(y-1)^2=-3y^2-2y+5$， ……………………5 分

于是当 $y=-\dfrac{1}{3}$ 时，$|MN|^2_{\max}=\dfrac{16}{3}$

$\therefore d_1^2+d_2^2$ 的最大值是$\dfrac{16}{3}$。 ……………………6 分

(2)证明：设点 E 的坐标为(x_1,y_1)，点 F 的坐标为(x_2,y_2). 假设存在 x 轴上的定点 $G(a,0)$，

使得$\angle EGO=\angle FGH$，即$k_{EG}+k_{FG}=0$ ……………………7 分

由题意可知直线 EF 的斜率存在，设直线 EF 的方程为$x=my+4$.

联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ x=my+4\end{cases}$消去 x 得，$(m^2+4)y^2+8my+12=0$，

$\Delta=64m^2-48(m^2+4)>0$，$m^2>12$，且$\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{8m}{m^2+4}\\ y_1y_2=\dfrac{12}{m^2+4}\end{cases}$ ……………………9 分

直线 EG 的斜率为$\dfrac{y_1}{x_1-a}$，直线 FG 的斜率为$\dfrac{y_2}{x_2-a}$

由$k_{EG}+k_{FG}=\dfrac{y_1}{x_1-a}+\dfrac{y_2}{x_2-a}=0$得：$y_1(x_2-a)+y_2(x_1-a)=0$公众号：网课来了

$\therefore y_1(my_2+4-a)+y_2(my_1+4-a)=0$ ……………………10 分

即$2my_1y_2+(4-a)(y_1+y_2)=\dfrac{24m}{m^2+4}-\dfrac{8(4-a)m}{m^2+4}=0$恒成立。

解得$a=1$即存在 x 轴上的定点$G(1,0)$。 ……………………12 分

22.（本题满分 12 分）已知函数$f(x)=\ln x-x+1$.

解：(1) $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$， ……………………1 分

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以$f(x)_{\max}=f(1)=0$ ……………………3 分

(2) 由题意$g(x)=f(x)+a(x-1)^2=\ln x-x+1+a(x-1)^2$

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-1+2a(x-1)=\dfrac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}=\dfrac{(x-1)(2ax-1)}{x}(x>0)$ ……4 分

①当$a\le 0$时，函数$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，此时，不存在实数$b\in(2,3)$，使得当$x\in(0,b]$时，函数$g(x)$的最大值为$g(b)$.

②当$a>0$时，令$g'(x)=0$有$x_1=1,x_2=\dfrac{1}{2a}$，

(i)当$a=\dfrac{1}{2}$时，函数$g(x)$在$(0,+¥)$上单调递增，显然符合题意.

(ii)当$\frac{1}{2a}>1$，即$0<a<\frac{1}{2}$时，函数$g(x)$再$(0,1)$和$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(1,\frac{1}{2a}\right)$上单调递减，$g(x)$在$x=1$处取得极大值，且$g(1)=0$，

要使对任意实数$b\in(2,3)$，当$x\in(0,b]$时，函数$g(x)$的最大值为$g(b)$，只需$g(2)\geq 0$，解得$a\geq 1-\ln 2$,

又$0<a<\frac{1}{2}$，所以此时实数a的取值范围是$1-\ln 2\leq a<\frac{1}{2}$. …………6 分

(iii)当$\frac{1}{2a}<1$，即$a>\frac{1}{2}$时，函数$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2a},1\right)$上单调递减，要对任意实数$b\in(2,3)$，当$x\in(0,b]$时，函数$g(x)$的最大值为$g(b)$，需$g\left(\frac{1}{2a}\right)\leq g(2)$代入化简得$\ln 2a+\frac{1}{4a}+\ln 2-1\geq 0$，①

令$h(a)=\ln 2a+\frac{1}{4a}+\ln 2-1\left(a>\frac{1}{2}\right)$，因为$h'(a)=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{4a}\right)>0$恒成立，

故恒有$h(a)>h\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$，所以$a>\frac{1}{2}$时，①式恒成立，

综上，实数a的取值范围是$[1-\ln 2,+\infty)$. …………………8 分

（3）由题意，正项数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1, a_{n+1}=\ln a_n+a_n+2$

由（1）知：$f(x)=\ln x-x+1\leq f(1)=0$，即有不等式$\ln x\leq x-1(x>0)$

由已知条件知$a_n>0, a_{n+1}=\ln a_n+a_n+2\leq(a_n-1)+a_n+2=2a_n+1$，

故$a_{n+1}+1\leq 2(a_n+1)$ …………………10 分

从而当$n\geq 2$时，$a_n+1\leq 2(a_{n-1}+1)\leq 2^2(a_{n-2}+1)\leq\cdots\leq 2^{n-1}(a_1+1)=2^n$

又$a_n\leq 2^n-1$，对$n=1$也成立，所以有$a_n\leq 2^n-1(n\in N^*)$ ………12 分