

兰州一中 2022-2023-2 学期期末考试试题

高二数学

说明: 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟. 答案写在答题卡上, 交卷时只交答题卡.

第 I 卷(选择题共 60 分)

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | (2a - x)(x - a) < 0\}$, 若 $2 \notin A$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $[1, 2]$ B. $[1, 2)$ C. $(1, 2)$ D. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

2. 已知矩形 $ABCD$, P 为平面 $ABCD$ 外一点, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$,

$\overrightarrow{PN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PD}$. 若 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AP}$, 则 $x + y + z =$ ()

- A. -1 B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

3. 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中依次不放回地取 2 个数, 事件 A 为“第一次取到的是偶数”, 事件 B 为“第二次取到的是 3 的整数倍”, 则 $P(B|A)$ 等于 ()

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{11}{45}$ D. $\frac{3}{4}$

4. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 在棱 DD_1 上, 直线 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BM , 则点 M 的位置是 ()

- A. 点 D B. 点 D_1 C. DD_1 的中点 D. 不存在

5. 给出定义: 设 $f''(x)$ 是函数 $y = f'(x)$ 的导函数, 若方程 $f''(x_0) = 0$ 有实数解, 则称点 $(x_0, f(x_0))$

为函数 $y = f(x)$ 的“拐点”. 已知函数 $f(x) = 3x + 4\sin x - \cos x$ 的拐点为 $M(x_0, f(x_0))$, 则下列结

论正确的为 ()

- A. $\tan x_0 = 4$ B. 点 M 在直线 $y = 3x$ 上
C. $\sin 2x_0 = \frac{4}{17}$ D. 点 M 在直线 $y = 4x$ 上

6. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则平面 AB_1D_1 与平面 BDC_1 的距离为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 抛一枚硬币, 若抛到正面则停止, 抛到反面则继续抛, 已知该硬币抛到正反两面是等可能的, 则以上

操作硬币反面朝上的次数期望为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{9}{8}$ C. 1 D. $\frac{5}{4}$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $\sin 2x - f'(x) > 0$,

且 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(-x) + f(x) - 2\sin^2 x = 0$, 则下列说法一定正确的是 ()

- A. $f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{\pi}{6}) > \frac{1}{2}$ B. $f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{\pi}{4}) < \frac{1}{4}$
C. $f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{3\pi}{4}) < \frac{1}{4}$ D. $f(\frac{\pi}{3}) - f(-\frac{3\pi}{4}) > \frac{1}{4}$

二、选择题 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

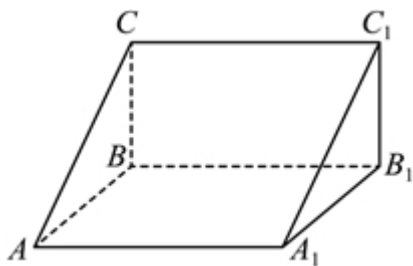
9. 下列四个条件中, 能成为 $x > y$ 的充分不必要条件的是 ()

- A. $xc^2 > yc^2$ B. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$ C. $|x| > |y|$ D. $\ln x > \ln y$

10. 甲罐中有 5 个红球, 2 个白球和 3 个黑球, 乙罐中有 4 个红球, 3 个白球和 3 个黑球. 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐, 分别以 A_1 , A_2 和 A_3 表示由甲罐取出的球是红球, 白球和黑球的事件; 再从乙罐中随机取出一球, 以 B 表示由乙罐取出的球是红球的事件, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $P(B) = \frac{2}{5}$ B. $P(B|A_1) = \frac{5}{11}$
C. 事件 B 与事件 A_1 相互独立 D. A_1 , A_2 , A_3 是两两互斥的事件

11. 我国古代数学名著《九章算术》中将“底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱”称为“堑堵”. 现有一如图所示的“堑堵” $ABC - A_1B_1C_1$, 其中 $AB \perp BC$, 若 $BB_1 = AB = 2$, $BC = 1$, 则 ()



- A. 该“堑堵”的体积为 2
B. 该“堑堵”外接球的表面积为 9π
C. 若点 P 在该“堑堵”上运动, 则 $|PA|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$
D. 该“堑堵”上, AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin^2 2x + a}{\sin^2 x}$ ($a \neq 0$)，则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$
- B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
- C. $a > 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 单调递增
- D. $a < 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 既有极大值点也有极小值点

第II卷(非选择题 共 90 分)

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $a > 0, b > 0$, 若 $2a + b = 4$, 则 ab 的最大值为_____.

14. 拉格朗日中值定理是微分学的基本定理之一, 内容为: 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的图象连续不间断, 在开区间 (a, b) 内的导数为 $f'(x)$, 那么在区间 (a, b) 内至少存在一点 c , 使得 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ 成立, 其中 c 叫做 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的“拉格朗日中值点”. 根据这个定理, 可得函数 $f(x) = \ln x$ 在 $[1, e]$ 上的“拉格朗日中值点”为_____.

15. 矩形 $ABCD$ 中, $\angle BCA = 30^\circ, AC = 20, PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = 5$, 则 P 到 BC 的距离为_____.

16. 已知 $a \in (0, 1), f(x) = a^x + (1+a)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 则 a 的取值范围是_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

某足球队为评估球员的场上作用, 对球员进行数据分析. 球员甲在场上出任边锋、前卫、中场三个位置, 根据过往多场比赛, 其出场率与出场时球队的胜率如下表所示.

场上位置	边锋	前卫	中场
出场率	0.5	0.3	0.2
球队胜率	0.6	0.8	0.7

- (1) 当甲出场比赛时, 求球队获胜的概率;
- (2) 当甲出场比赛时, 在球队获胜的条件下, 求球员甲担当前卫的概率.

18. (本题满分 12 分)

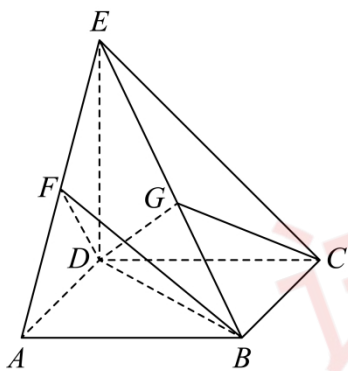
已知函数 $f(x) = e^x + ax - e$, $a \in \mathbb{R}$ (注: $e = 2.718281 \dots$ 是自然对数的底数).

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 只有一个极值点, 求实数 a 的取值范围.

19. (本题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $E-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $ED = DC$, F 为 AE 的中点, G 为 BE 上一点.



(1) 求证: $CE \parallel$ 平面 DFB ;

(2) 若 $BD \perp$ 平面 AGC , 求二面角 $G-DC-B$ 的度数.

20. (本题满分 12 分)

MCN 即多频道网络，是一种新的网红经济运行模式，这种模式将不同类型和内容的 PGC（专业生产内容）联合起来，在资本有力支持下，保障内容的持续输出，从而最终实现商业的稳定变现，在中国以直播电商、短视频为代表的新兴网红经济的崛起，使 MCN 机构的服务需求持续增长。数据显示，近年来中国 MCN 市场规模迅速扩大。下表为 2018 年—2022 年中国 MCN 市场规模（单位：百亿元），其中 2018 年—2022 年对应的代码依次为 1-5。

年份代码 x	1	2	3	4	5
中国 MCN 市场规模 y	1.12	1.68	2.45	3.35	4.32

(1) 由上表数据可知，可用指数函数模型 $y = a \cdot b^x$ 拟合 y 与 x 的关系，请建立 y 关于 x 的回归方程；

(2) 从 2018 年-2022 年中国 MCN 市场规模中随机抽取 3 个数据，记这 3 个数据中与 $\bar{y}$ 的差的绝对值小于 1 的个数为 X ，求 X 的分布列与期望。

参考数据：

$\bar{y}$	$\bar{v}$	$\sum_{i=1}^5 x_i y_i$	$\sum_{i=1}^5 x_i v_i$
2.58	0.84	46.83	15.99

其中 $v_i = \ln y_i$ ， $\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i$ ， $\bar{v} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 v_i$ 。

参考公式：对于一组数据 (u_1, v_1) ， (u_2, v_2) ，...， (u_n, v_n) ，其回归直线 $\hat{v} = \hat{a} + \hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘

估计公式分别为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}$ ， $\hat{a} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$ 。

21. (本题满分 12 分)

如图 1 所示, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 2$, M 为 CD 中点, 将 $\triangle DAM$ 沿 AM 折起, 使点 D 到点 P 处, 且平面 $PAM \perp$ 平面 $ABCM$, 如图 2 所示.

(1) 求证: $PB \perp AM$;

(2) 在棱 PB 上取点 N , 使平面 $AMN \perp$ 平面 PAB , 求直线 AB 与平面 AMN 所成角的正弦值.

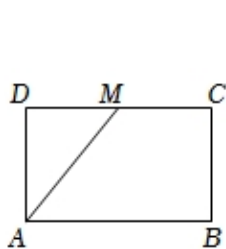


图1

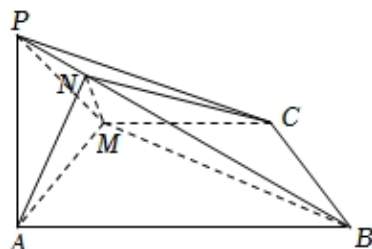


图2

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x - a \ln x$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 当 $a < e$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 零点的个数;

(2) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) \geq ax^a \ln x - xe^x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.