

武汉中学 2023—2024 学年度五月月考

高二数学试卷

考试时间：2023 年 5 月 29 日 14: 30——16: 30 试卷满分：150 分

一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 将甲、乙、丙、丁四名同学随机分配到三个会议中心担任志愿者，每个会议中心至少有一名同学，且每名同学只去一个会议中心，则甲和乙没有被分配到同一会议中心的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{11}{12}$

2. 设 $0 < a < \frac{1}{2}, 0 < b < \frac{1}{2}$ ，随机变量 ξ 的分布

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	a	b

则当 a 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内增大时，（ ）

- A. $E(\xi)$ 增大， $D(\xi)$ 增大 B. $E(\xi)$ 增大， $D(\xi)$ 减小
C. $E(\xi)$ 减小， $D(\xi)$ 增大 D. $E(\xi)$ 减小， $D(\xi)$ 减小

3. 已知变量 x, y 的关系可以用模型 $y = c \cdot e^{kx}$ 拟合，设 $z = \ln y$ ，其变换后得到一组数据如下：

x	16	17	18	19
z	50	34	41	31

由上表可得线性回归方程 $\hat{z} = -4x + \hat{a}$ ，则 $c =$ （ ）

- A. -4 B. e^{-4} C. 109 D. e^{109}

4. 我国中医药选出的“三药三方”对治疗新冠肺炎均有显著效果，功不可没.三药”分别为金花清感颗粒、连花清瘟胶囊、血必清注射液；“三方”分别为清肺排毒汤、化湿败毒方、宜肺败毒方.若某医生从“三药三方”中随机选出两种，事件 A 表示选出的两种中至少有一药，事件 B 表示选出的两种中有一方，则 $P(B | A) =$ （ ）

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

5. 已知二项式 $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的展开式中只有第 4 项的二项式系数最大，现从展开式中任取 2 项，则取到的项都是有理项的概率为（ ）

- A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{8}$

6. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对一切正整数 n , 点 (n, S_n) 在函数 $f(x) = x^2 + 2x$ 的图

象上, $b_n = \frac{2}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 1$), 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n =$ ()

- A. $\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$ B. $\sqrt{2n+3} - 1$
C. $\sqrt{2n+3} - \sqrt{3}$ D. $\sqrt{2n} - \sqrt{2n-2}$

7. 现有3道四选一的单选题, 学生李明对其中的2道题有思路, 1道题完全没有思路. 有思路的题答对的概率为0.8, 没有思路的题只好任意猜一个答案, 猜对答案的概率为0.25, 若每题答对得5分, 不答或答错得0分, 则李明这3道题得分的期望为()

- A. $\frac{93}{10}$ B. $\frac{37}{4}$ C. $\frac{39}{4}$ D. $\frac{211}{20}$

8. 若 $\frac{1}{a} = \pi$, $\frac{1}{\pi b} = \sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}c} = e$ (其中 e 为自然对数的底数), 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

二、多选题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题有多项符合题目要求, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分)

9. 某市物价局派人对 5 个商场某商品同一天的销售量及其价格进行调查, 得到该商品的售价 x 元和销售量 y 件之间的一组数据如下表所示:

x	90	95	100	105	110
y	11	10	8	6	5

用最小二乘法求得 y 关于 x 的经验回归直线是 $\hat{y} = -0.32x + \hat{a}$, 相关系数 $r = -0.9923$, 则

下列说法正确的有 ()

- A. 变量 x 与 y 负相关且相关性较强
B. $\hat{a} = 40$
C. 当 $x = 85$ 时, y 的估计值为 13
D. 相应于点 $(105, 6)$ 的残差为 -0.4

10. 若 $(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 且 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = 126$, 则下列结论正确的是 ()

A. $n = 6$

B. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = 120$

C. $(1 + 2x)^n$ 展开式中二项式系数和为 729

D. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 321$

11. 下列命题中，正确的命题是()

A. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$ ，若 $E(X) = 30$ ， $D(X) = 20$ ，则 $p = \frac{2}{3}$

B. 已知 $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(\bar{A}|B) = \frac{3}{4}$ ， $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{1}{2}$ ，则 $P(B) = \frac{2}{3}$

C. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0, 1)$ ，若 $P(\xi > 1) = p$ ，则 $P(-1 < \xi < 0) = \frac{1}{2} - p$

D. 某人在 10 次射击中，击中目标的次数为 X ， $X \sim B(10, 0.7)$ ，当 $X=7$ 时概率最大.

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ， A 、 B 分别为双曲线的左、右顶点， F_1 、 F_2

为左、右焦点， $|F_1F_2| = 2c$ ，且 a ， b ， c 成等比数列，点 P 是双曲线 C 的右支上异于点 B 的任意一点，记 PA ， PB 的斜率分别为 k_1 ， k_2 ，则下列说法正确的是()

A. 当 $PF_2 \perp x$ 轴时， $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$

B. 双曲线的离心率 $e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

C. k_1k_2 为定值 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

D. 若 I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，满足 $S_{\triangle IPF_1} = S_{\triangle IPF_2} + xS_{\triangle IF_1F_2} (x \in \mathbf{R})$ ，则 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 某企业瓷砖生产线上生产的瓷砖某项指标 $X \sim N(800, \sigma^2)$ ，且 $P(X < 801) = 0.6$ ，现从该生产线上随机抽取 10 片瓷砖，记 Y 表示 $800 \leq X < 801$ 的瓷砖片数，则 $E(Y) =$ _____.

14. 下列命题中错误的是_____.

①将一组数据中的每个数都加上或减去同一个常数后，期望与方差都不变；

②残差图中残差点所在的水平带状区域越窄，则回归方程的预报精确度越高；

③在一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ($n \geq 2, x_1, x_2, \dots, x_n$ 不全相等) 的散点图中，

若所有样本点 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 都在直线 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 上，则这组样本数据的线性相关系

数为 $-\frac{1}{2}$ ；

④在吸烟与患肺病这两个分类变量的计算中，若由独立性检验知，在犯错误率不超过 0.01 的前提下，认为吸烟与患肺病有关系。若某人吸烟，则他有 99% 的可能性患肺病。

⑤甲、乙两个模型的 R^2 分别约为 0.88 和 0.80，则模型甲的拟合效果更好；

15. 中国古典乐器一般按“八音”分类，八音分为“金、石、土、革、丝、木、匏、竹”。某同学安排了包括“土、匏、竹”在内的六种乐器的学习，每种乐器安排一节，连排六节，并要求“土”与“匏”相邻排课，但均不与“竹”相邻排课，且“丝”不能排在第一节，则不同的排课方式的种数为_____。

16. 已知 $a > 0$ ，不等式 $(x+1)^{1-a}e^{x+1} - a\ln(x+1) \geq 0$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____。

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (10 分)某电视台“挑战主持人”节目的挑战者闯第一关需要回答三个问题，其中前两个问题回答正确各得 10 分，回答不正确得 0 分，第三个问题回答正确得 20 分，回答不正确得 -10 分。如果一位挑战者回答前两个问题正确的概率都是 $\frac{2}{3}$ ，回答第三个问题正确的概率为 $\frac{1}{2}$ ，且各题回答正确与否相互之间没有影响。若这位挑战者回答这三个问题的总分不低于 10 分就算闯关成功。

(1)求至少回答正确一个问题的概率；

(2)求这位挑战者回答这三个问题的总得分 X 的分布列及这位挑战者闯关成功的概率。

18. (12 分)某数学兴趣小组为研究本校学生数学成绩与语文成绩的关系，采取有放回的简单随机抽样，从学校抽取样本容量为 200 的样本，将所得数学成绩与语文成绩的样本观测数据整理如下：

		语文成绩		合计
		优秀	不优秀	
数学成绩	优秀	50	30	80
	不优秀	40	80	120
合计		90	110	200

(1)根据 $\alpha = 0.010$ 的独立性检验，能否认为数学成绩与语文成绩有关联？

(2)在人工智能中常用 $L(B|A) = \frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 表示在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的优势,

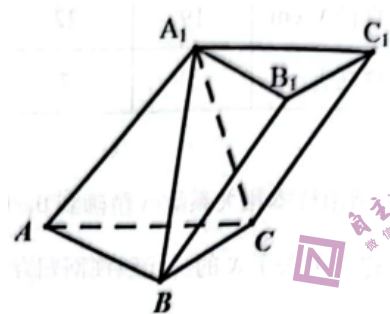
在统计中称为似然比.现从该校学生中任选一人, A 表示“选到的学生语文成绩不优秀”,
B 表示“选到的学生数学成绩不优秀” 请利用样本数据, 估计 $L(B|A)$ 的值.

(3)现从数学成绩优秀的样本中, 按分层抽样的方法选出 8 人组成一个小组, 从抽取的 8 人里再随机抽取 3 人参加数学竞赛, 求这 3 人中, 语文成绩优秀的人数 X 的概率分布列及数学期望.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

α	0.050	0.010	0.001
χ_α	3.841	6.635	10.828

19. (12 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC, A_1A=A_1C$.



(1) 证明: $BA_1 \perp A_1C_1$;

(2) 若 $A_1A=A_1C=\sqrt{2}AB, \angle ABC=\frac{\pi}{3}$, 且 $AB=A_1B$, 求二面角 A_1-BC-C_1 的正弦值.

20. (12 分) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{na_n}{3}$. 已知 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明: $T_n < \frac{S_n}{2}$.

21. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 $B(0,1)$, 过点 $(\sqrt{2}, 0)$ 且与 x 轴垂直的直线被截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) 设直线 l_1 交椭圆 Γ 于异于点 B 的 P, Q 两点, 以 PQ 为直径的圆经过点 B , 线段 PQ 的中垂线 l_2 与 x 轴的交点为 $(x_0, 0)$, 求 x_0 的取值范围.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = ae^{-x} + \ln x - 1 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $a \leq e$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x)$ 恰有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且 $x_1 + x_2 \leq \frac{(2e+1) \cdot \ln 2e}{2e-1}$, 求 $\frac{x_2}{x_1}$ 的最大值.