2021 年湖北省高二年级学年期末联考

数学参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	C	D	B	A	A

二、选择题

题号	9	10	11	12
答案	ABD	AC	BC	BCD

三、填空题

13. 0.4　　14. 108　　15. 3　　16. $-2-2\sqrt{3}$

四、解答题

17. 解：（1）过切点 $B(-2,-1)$ 且与 $x-y+1=0$ 垂直的直线为 $y+1=-(x+2)$，

即 $x+y+3=0$，则其经过圆心.　　………………………1 分

$\because$ 直线 AB 方程为 $y=-1$，$\therefore$ 直线 AB 的中垂线 $x=1$ 过圆心，　　………………………2 分

联立 $\begin{cases} x+y+3=0 \\ x=1 \end{cases}$，解得 $x=1, y=-4$.　　………………………3 分

$\therefore$ 圆心为 $(1,-4)$，$\therefore$ 半径 $r=\sqrt{(1+2)^2+(-4+1)^2}=3\sqrt{2}$，　　………………………4 分

$\therefore$ 所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y+4)^2=18$.　　………………………5 分

（2）$\because$ 直线 l 的方程为 $x-y=0$，

$\therefore$ 圆心 $C(1,-4)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$，　　………………………7 分

设 MN 的中点为 D，连接 CD，则必有 CD ⊥ MN，

在 $Rt\Delta CDM$ 中，$|DM|=\sqrt{18-d^2}=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$，　　………………………9 分

$\therefore |MN|=2|DM|=\sqrt{22}$.　　………………………10 分

18. 解：（1）由题意得 $\dfrac{S_1}{1}=1, \dfrac{S_2}{2}=3$，设等差数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 d，

则 $d=\dfrac{S_2}{2}-\dfrac{S_1}{1}=1$.　　………………………2 分

$\therefore \dfrac{S_n}{n}=2+(n-1)\times 1=n+1, \therefore S_n=n(n+1)$　　………………………4 分

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n$，a_1 也满足，

$\therefore a_n = 2n\left(n \in N^*\right)$. ······················6 分

（2）$b_n = \dfrac{1}{(a_n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ ······················8 分

$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ ······11 分

$\therefore T_n = \dfrac{n}{2n+1}$. ····················12 分

19. 解：（1）$\because AB \perp$ 平面BB_1C_1C，

$\therefore AB \perp BC_1$. ····················2 分

又$\because BC = BC_1 = \sqrt{2}, CC_1 = 2$

$\therefore BC^2 + BC_1^2 = CC_1^2$. ······················4 分

$\therefore BC \perp BC_1$，又$AB \cap BC = B$

$\therefore BC_1 \perp$ 平面ABC . ······················5 分

（2）以 B 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC_1}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系. ······················6 分

则 $B(0,0,0), C(\sqrt{2},0,0), A(0,3,0), C_1(0,0,\sqrt{2}), B_1(-\sqrt{2},0,\sqrt{2}), E\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

有 $\overrightarrow{AC_1} = (0,-3,\sqrt{2}), \overrightarrow{AE} = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -3, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ······················7 分

设 $\overrightarrow{n_1} = (x,y,z)$ 为平面 AC_1E 的法向量，$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} -3y + \sqrt{2}z = 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x - 3y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \end{cases}$

不妨取 $z = 3$，则 $\overrightarrow{n_1} = (-3, \sqrt{2}, 3)$. ······················9 分

因为 $AB \perp$ 平面BB_1C_1C，所以在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上取平面 CC_1E 的法向量 $\overrightarrow{n_2} = (0,1,0)$

······················10 分

所以 $\cos\left\langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \right\rangle = \dfrac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{20}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

故二面角 $A - C_1E - C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ······················12 分

法 2：三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，由（1）知 $BC \perp BC_1$ 且 $BC = BC_1$.

则 $BC_1 \perp B_1C_1$ 且 $BC_1 = B_1C_1$，$\because E$ 是 BB_1 中点，$\therefore C_1E \perp BB_1$. ··················6 分

又$\because AB \perp$ 平面BB_1C_1C，

$\therefore AB \perp C_1E$，又 $BB_1 \cap AB = B$，

$\therefore C_1E \perp$ 平面ABB_1A_1． ························8 分

$\therefore C_1E \perp AE, \angle AEB$ 即为二面角 $A-C_1E-C$ 的平面角． ························9 分

$\because AB=3, CC_1=2, \therefore BE=1, AE=\sqrt{10}, \cos\angle AEB=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

故二面角 $A-C_1E-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$． ····················12 分

20．解：（1）补充完整的 2×2 列联表如下：

	没有获奖	获奖	合计
选修历史	4	16	20
没有选修历史	18	12	30
合计	22	28	50

························2 分

$\therefore k^2=\dfrac{50(4\times12-16\times18)^2}{20\times30\times22\times28}\approx7.8>6.635$． ························4 分

故有 99%的把握认为“党史知识竞赛是否获奖与选修历史学科”有关 ······5 分

（2）①显然，随机变量 X 服从超几何分布，取值为 3 表示抽到选修了历史但没有获奖的人数恰好为 3 人．

故 $P(X=3)=\dfrac{C_4^3C_{16}^1}{C_{20}^4}$． ························8 分

②从全校获奖的学生中随机抽取 1 人，则此人选修了历史学科的概率为 $\dfrac{16}{28}=\dfrac{4}{7}$．

························9 分

设从全校获奖的学生中随机抽取 14 人，这些人中选修了历史学科的人数为 Y，

则 $Y\sim B\left(14,\dfrac{4}{7}\right)$． ························11 分

故 $E(Y)=14\times\dfrac{4}{7}=8$． ························12 分

21．解：（1）设椭圆 E 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由题意得，$c=1$． ························1 分

$\because$双曲线的离心率为 $\dfrac{\sqrt{4+12}}{2}=2$， ························2 分

$\therefore$椭圆 E 的离心率 $e=\dfrac{1}{2}$． ························3 分

$\therefore a=2$，$\therefore b^2=a^2-c^2=3$，

故椭圆 E 的方程：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ························5 分

（2）由题意，$r=\sqrt{3}$，即圆心到直线 l 的距离为$\sqrt{3}$，则 $\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$，

$\therefore m^2=3(1+k^2)$， ························6 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4(m^2-3)=0$，

由△> 0，得 $x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+3}, x_1x_2=\frac{4(m^2-3)}{4k^2+3}$，　　……………………8 分

则 $|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{\frac{1}{3}m^2}\sqrt{\left(-\frac{8km}{4k^2+3}\right)^2-\frac{16(m^2-3)}{4k^2+3}}=-\frac{4km}{4k^2+3}$，　　……………………9 分

又 $|MF_2|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=2-\frac{1}{2}x_1, |NF_2|=2-\frac{1}{2}x_2$，　　……………………10 分

$|MF_2|+|NF_2|=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=4+\frac{4km}{4k^2+3}$.　　……………………11 分

ΔMNF_2 周长 $=|MN|+|MF_2|+|NF_2|=4$，

∴ ΔMNF_2 周长为定值 4.　　……………………12 分

22. 解：（1）$f'(x)=\frac{a}{x}-x+(a-1)=\frac{-x^2+(a-1)x+a}{x}(x>0)$

令 $f'(x)=0$ 解得 $x=-1$(舍)或 $x=a$.　　……………………1 分

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；　　……………………3 分

②当 $a>0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.

……………………5 分

（2）$\because f(x_1)=f(x_2)$，由（1）不妨设 $0<x_1<a<x_2$.

设 $g(x)=f(x)-f(2a-x)$.　　……………………6 分

则 $g'(x)=f'(x)+f'(2a-x)=\frac{a}{x}-x+(a-1)+\frac{a}{2a-x}-(2a-x)+(a-1)=\frac{2(x-a)^2}{x(2a-x)}$.

当 $x\in(0,2a)$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，则 $g(x)$ 在 $x\in(0,2a)$ 上单调递增.　　……8 分

$\therefore g(x_1)<g(a)=0$，$\therefore f(x_1)-f(2a-x_1)<0$，$\therefore f(x_1)<f(2a-x_1)$.　　………9 分

由 $f(x_1)=f(x_2)$，则可得 $f(x_2)<f(2a-x_1)$.　　……………………10 分

$\because 0<x_1<a<x_2$，$\therefore 2a-x_1>a$.

而 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore x_2>2a-x_1$ $\therefore x_1+x_2>2a$.　　……………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。