2023年高三1月大联考（全国乙卷）

理科数学·全解全析及评分标准

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	C	B	D	C	A	B	D	C	B	C

1．A【解析】$\because A=\{x\mid x>0\}$，$B=\{x\mid(3x+1)(x-1)\le 0\}=\{x\mid -\frac{1}{3}\le x\le 1\}$，$\therefore A\cup B=\{x\mid x\ge -\frac{1}{3}\}$，

$\therefore \complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x\mid x<-\frac{1}{3}\}$，故选A．

2．B【解析】设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则$\bar{z}=a-bi$，$z+2\bar{z}=3a-bi=3+2i$，则$a=1,b=-2$，$\therefore \frac{1}{z}=$

$\frac{1}{1-2i}=\frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1+2i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$，故选B．

3．C【解析】观察主视图中的木条位置，分析可知侧视图不可能是A和B，观察木条的层次位置，分析可知侧视图也不可能是D，故选C．

4．B【解析】因为$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$

$2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=20-4-2=14$，故选B．

5．D【解析】$\because \sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\therefore \cos(\alpha-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{3}$，$\therefore \cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})=2\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{6})-1=-\frac{7}{9}$，故选D．

6．C【解析】由函数$f(x)=3^{x^2-3tx}$在区间$(2,3)$上单调递减，得$y=x^2-3tx$在区间$(2,3)$上单调递减，所以

$\frac{3t}{2}\ge 3$，解得$t\ge 2$．结合A，B，C，D四个选项，知使得"函数$f(x)=3^{x^2-3tx}$在区间$(2,3)$上单调递减"成立的一个充分不必要条件可以是$t\ge 3$，故选C．

7．A【解析】设第i次电压不稳仪器损坏为事件$A_i(i=1,2)$，则$P(A_1)=0.1,P(\overline{A_1})=0.9$，$P(A_2|A_1)=0.2$，

$P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=0.8$，故连续两次电压不稳仪器未损坏的概率为$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1})=0.8\times0.9=0.72$，故选A．

8．B【解析】方法一：由题意，得$g(x)=4\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})$．由$h(x)=g(x)-2=0$，得$\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$，

所以$\omega x+\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{3}$或$\omega x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$x=\frac{2k\pi-\frac{2\pi}{3}}{\omega}$或$x=\frac{2k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，欲使函数$h(x)$在

$(0,2\pi)$上有且仅有4个零点，则$\frac{4\pi}{\omega}<2\pi\le\frac{\frac{16\pi}{3}}{\omega}$，解得$2<\omega\le\frac{8}{3}$，故选B．

方法二：由题意，得 $g(x)=4\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})$ 由 $h(x)=g(x)-2=0$，得 $\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$，令 $\omega x+\frac{\pi}{3}=t$，由 $x\in(0,2\pi)$，得 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},2\omega\pi+\frac{\pi}{3})$，即 $t\in(\frac{\pi}{3},2\omega\pi+\frac{\pi}{3})$，就变为方程 $\cos t=\frac{1}{2}$ 在 $t\in(\frac{\pi}{3},2\omega\pi+\frac{\pi}{3})$ 上有且仅有4个实根，则 $\frac{13\pi}{3}<2\omega\pi+\frac{\pi}{3}\le\frac{17\pi}{3}$，所以 $2<\omega\le\frac{8}{3}$，故选B.

9．D 【解析】$a=\log_{1.2}1.1<\log_{1.2}1.2=1$，$b=1.2^{1.1}>1.2^{0}=1$，$c=1.1^{1.2}>1.1^{0}=1$．设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，∴ $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，∵ $1.1<1.2<e$，∴ $\frac{\ln 1.2}{1.2}>\frac{\ln 1.1}{1.1}$，即 $1.1\ln 1.2>1.2\ln 1.1$，也即 $\ln 1.2^{1.1}>\ln 1.1^{1.2}$，∴ $1.2^{1.1}>1.1^{1.2}$，

∴ $a<c<b$，故选D.

10．C 【解析】由题意，知 $a_{n+1}+1=\frac{1}{2}(a_n+1)$，∴ $a_n+1=2\times(\frac{1}{2})^{n-1}$，∴ $a_n=2\times(\frac{1}{2})^{n-1}-1$，

∴ $S_n=2\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}-n=-4\times(\frac{1}{2})^n+4-n$，∴ $\frac{6n-7}{a_n+S_n+4n-8}=\frac{6n-7}{3n-5}=2+\frac{3}{3n-5}$，

当 $n=2$ 时，$(\frac{6n-7}{3n-5})_{\max}=5$，∴ $\lambda\ge5$，∴ λ 的最小值为5，故选C.

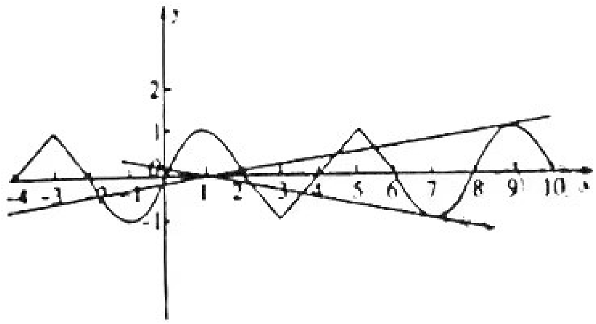
11．B 【解析】设双曲线 C 的半焦距为 c，∵ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=-2$，∴ $|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OD}|=2$，由圆的相交弦定理知，$ac=|OA|\cdot|OF|=|OB||OD|=2$，又圆 M 的半径 $r=\frac{a+c}{2}$，∴ $S=\pi(\frac{a+c}{2})^2\in[\frac{9\pi}{4},\frac{25\pi}{8}]$，∴ $\frac{9}{4}\le\frac{a^2+2ac+c^2}{4}\le\frac{25}{8}$，∴ $9\le a^2+c^2+2ac\le\frac{25}{2}$，∴ $5\le a^2+c^2\le\frac{17}{2}$，∴ $\frac{5}{ac}\le\frac{a^2+c^2}{ac}\le\frac{17}{2ac}$，又 $ac=2$，∴ $\frac{5}{2}\le e+\frac{1}{e}\le\frac{17}{4}$，

∴ $2\le e\le4$，故选B.

12．C 【解析】因为 $f(1-x)+f(x-1)=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，$f(0)=0$. 因为 $f(x+8)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为8. 又 $f(1)=-(1+a)^2+1=1$，所以 $a+1=0$，所以 $a=-1$，$f(3)=|3+b|-1=-1$，所以 $b=-3$，故①正确.

因为 $f(2023)=f(253\times8-1)=f(-1)=-f(1)=-1$，故②错误.

易知 $f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+1, & 0<x\le2\\ |x-3|-1, & 2<x\le4\end{cases}$，作出函数 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的图象，根据函数 $f(x)$ 为奇函数，及其周期为8，得到函数 $f(x)$ 在R上的图象，如图所示，由 $f(x)$ 的图象知，当 $x\in[-4,6]$ 时，$f(x)<0$ 的解集为 $(-2,0)\cup(2,4)$，故③正确.



由题意，知直线 $y=mx-m=m(x-1)$ 恒过点 $(1,0)$，与函数 $f(x)$ 的图象在 y 轴右侧有 3 个交点.根据图象可知当 $m>0$ 时，应有 $m\times5-m<1$，即 $m<\frac{1}{4}$，且同时满足 $mx-m=f(x)$，$x\in[8,10]$ 无解，即当 $x\in[8,10]$ 时，$f(x)=(10-x)(x-8)$，$(10-x)(x-8)=mx-m$ 无解，所以 $\Delta<0$，解得 $16-6\sqrt{7}<m<16+6\sqrt{7}$，所以 $16-6\sqrt{7}<m<\frac{1}{4}$.当 $m<0$ 时，应有 $m\times3-m>-1$，即 $m>-\frac{1}{2}$，且同时满足 $mx-m=f(x)$，$x\in[6,8]$ 无解，即当 $x\in[6,8]$ 时，$f(x)=(x-6)(x-8)$，$(x-6)(x-8)=mx-m$ 无解，所以 $\Delta<0$，解得 $-12-2\sqrt{35}<m<-12+2\sqrt{35}$，所以 $-\frac{1}{2}<m<-12+2\sqrt{35}$.

综上，$16-6\sqrt{7}<m<\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{2}<m<-12+2\sqrt{35}$，④错误.故选 C.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 9 【解析】因为 $(x-1)(1+\frac{1}{x})^6=x(1+\frac{1}{x})^6-(1+\frac{1}{x})^6$，所以其展开式中含有 $\frac{1}{x}$ 项的系数有两部分：一部分是 $(1+\frac{1}{x})^6$ 展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数 $C_6^2=15$，另一部分是 $(1+\frac{1}{x})^6$ 展开式中 $\frac{1}{x}$ 的系数 $C_6^1=6$，所以所求的系数为 $15-6=9$，故填 9.

14. 4039 【解析】方法一：由题意，知 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列，$\frac{S_1}{1}=-5$，$\frac{S_2}{2}=-4$，所以 $\frac{S_n}{n}=-5+(n-1)=n-6$，即 $S_n=n^2-6n$.当 $n\geq2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2-6(n-1)$，以上两式相减，得 $a_n=2n-7\ (n\geq2)$.又 $a_1=-5$ 也适合上式，所以 $a_n=2n-7$，所以当 $n=2023$ 时，$a_{2023}=2\times2023-7=4039$，故填 4039.

方法二：由题意，知 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列，所以数列 $\{a_n\}$ 也是等差数列，所以数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_2-a_1=-3+5=2$，所以 $a_n=a_1+(n-1)\times2=2n-7$，所以 $a_{2023}=2\times2023-7=4039$，故填 4039.

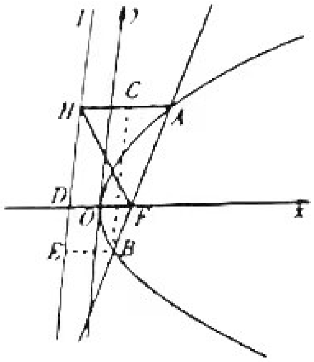
15. $2\sqrt{3}$ 【解析】由抛物线的定义知，$|AH|=|AF|$.又 $|AH|=2|BF|$，所以 $|AF|=2|BF|$.如图，过点 B 作直线 l 的垂线，垂足为 E，则 $|BE|=|BF|$.过点 B 作 AH 的垂线，垂足为 C.设 $|BE|=|BF|=m$，则

$|AH|=|AF|=2m$，从而 $|AC|=|AH|-|BE|=2m-m=m$，所以 $\cos\angle CAF=\dfrac{|AC|}{|AB|}=\dfrac{m}{|AF|+|BF|}=$

$\dfrac{m}{2m+m}=\dfrac{1}{3}$，所以 $\tan\angle CAF=2\sqrt{2}$，所以直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{2}$，所以直线 AB 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$，

不妨设 $A(x_1,y_1)$，$x_1>0,y_1>0$，由 $\begin{cases}y_1=2\sqrt{2}(x_1-1)\\y_1^2=4x_1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=2\\y_1=2\sqrt{2}\end{cases}$，所以 $|HF|=\sqrt{y_1^2+|DF|^2}=$

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，故填 $2\sqrt{3}$．



16. ③④ 【解析】由题意，知平面 D_1EF 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面图形为 D_1HEFG，如图，易得

$CG=AH=\dfrac{2}{3},GC_1=A_1H=\dfrac{4}{3}$，所以 $D_1G=D_1H=\sqrt{4+\dfrac{16}{9}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$，$HE=GF=\sqrt{1+\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，所以所求周

长为 $2\times\dfrac{2\sqrt{13}}{3}+2\times\dfrac{\sqrt{13}}{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{13}+\sqrt{2}$，故①错误；

设点 B 到平面 D_1EF 的距离为 h，由题意，得 $V_{D_1-BEF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2=\dfrac{1}{3}$，$D_1E=D_1F=3,EF=\sqrt{2}$，所以

$S_{\triangle D_1EF}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\dfrac{17}{2}}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$，所以 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}h\cdot\dfrac{\sqrt{17}}{2}$，即 $h=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$，故②错误；

正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $2\times2\times2=8$，其中一部分的体积

$V=V_{D-DEF}+V_{F-D_1DCG}+V_{F-D_1DAH}=\dfrac{1}{3}\times2\times\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{2}{3}+2)\times2\times1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{2}{3}+2)\times2\times1=\dfrac{25}{9}$，则另一部分

的体积为 $8-\dfrac{25}{9}=\dfrac{47}{9}$，所以平面 D_1EF 将正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 分割成两部分，较小一部分的体积为

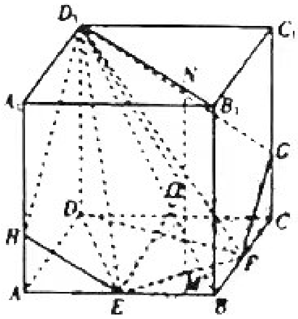
$\dfrac{25}{9}$，故③正确；

对于三棱锥 $B-D_1EF$，先找到 $\triangle BEF$ 的外接圆的圆心，即为 EF 中点，设为 M，过点 M 作 $MN//BB_1$，

交 B_1D_1 于点 N，则外接球球心在直线 MN 上，设球心为 O，外接球半径为 R，$MO=x$，所以

$R^2=x^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=(2-x)^2+(\dfrac{3\sqrt{2}}{2})^2$，所以 $x=2,R^2=\dfrac{9}{2}$，球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=18\pi$，④正确．

故填③④．



说明：第15题填成$\sqrt{12}$也给分.

第16题，除了填成③④得5分，其他情况均为0分.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

【解析】(1) 由题意，得 $a\sin A=b\sin B+(c-b)\sin C$，（1分）

由正弦定理，得 $a^2=b^2+(c-b)c=b^2+c^2-bc$.（2分）

由余弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$（3分）

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.（5分）

(2) 因为$\triangle ABD$与$\triangle ACD$的面积之和等于$\triangle ABC$的面积，且AD为角A的平分线，（6分）

由(1)知，$A=\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{1}{2}\sqrt{3}b\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sqrt{3}c\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}$，（7分）

所以$b+c=bc$.（8分）

又$bc\le(\frac{b+c}{2})^2$，当且仅当$\begin{cases}b=c\\b+c=bc\end{cases}$，即$b=c=2$时取等号，（9分）

所以$b+c\le(\frac{b+c}{2})^2$，（10分）

所以$b+c\ge4$，（11分）

所以$b+c$的最小值为4.（12分）

说明：第(2)问中8分之后这样写也给分：

$b+c=bc\ge2\sqrt{bc}$，当且仅当$\begin{cases}b=c\\b+c=bc\end{cases}$，即$b=c=2$时取等号，（9分）

所以$\sqrt{bc}\ge2$，则$bc\ge4$，（10分）

所以 $b+c\geq 4$．（11分）

所以 $b+c$ 的最小值为4．（12分）

或者：$(b+c)^2=b^2c^2$，

则 $b^2c^2=(b+c)^2\geq 4bc$，当且仅当 $\begin{cases}b=c\\b+c=bc\end{cases}$，即 $b=c=2$ 时取等号，（9分）

所以 $bc\geq 4$．（10分）

所以 $b+c\geq 4$．（11分）

所以 $b+c$ 的最小值为4．（12分）

以上方法中未写取等条件扣一分．

18．（12分）

【解析】（1）由于 $K^2=\dfrac{120\times(40\times 40-20\times 20)^2}{60\times 60\times 60\times 60}$（2分）

$=\dfrac{40}{3}\approx 13.333$（3分）

>10.828．（4分）

所以有99.9%的把握认为教师是否经常使用多媒体教学与教师年龄有关．（5分）

（2）抽取的6名教师中，经常使用多媒体教学的教师人数为 $6\times\dfrac{40}{40+20}=4$，

不经常使用多媒体教学的教师人数为 $6\times\dfrac{20}{40+20}=2$．（6分）

X 的所有可能取值为1,2,3.

$P(X=1)=\dfrac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，（9分）

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

（10分）

所以 $E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}$（11分）

$=2$（12分）

说明：第（1）问解答中：未写出"≈ 13.333"，但比较大小正确，不扣分；

第（2）问解答过程中：得出经常使用多媒体教学的教师人数为4，不经常使用多媒体教学的教师人数为2，但没有用比例计算，不扣分；

$P(X=1)=\dfrac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$．三个概率各1分，如果这三个概率有至少有一个计算错误，后面的结果均不再给分．

19．（12分）

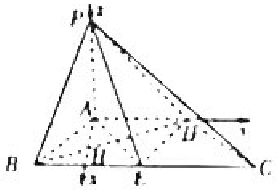
【解析】(1) 如图，连接 ED，$AD \parallel BC$，∵ E 为 BC 的中点，$AD=\frac{1}{2}BC$，∴ $BE=\frac{1}{2}BC$，

∴ $AD=BE$，$AD \parallel BE$，∴四边形 $ABED$ 为平行四边形．

又 $AB=AD$，∴四边形 $ABED$ 为菱形，∴ $AE \perp BD$．(2分)

∵ $PA \perp$ 平面 $ABCD$，$BD \subset$ 平面 $ABCD$，∴ $PA \perp BD$．(4分)

又 $AE,PA \subset$ 平面 PAE，且 $AE \cap PA=A$，∴ $BD \perp$ 平面 PAE．(5分)



(2) 设 $PA=AB=AD=\frac{1}{2}BC=1$，则 $AE=BE=AB=1$，∴ $\triangle ABE$ 为正三角形．(6分)

过点 A 作 $AH \perp AD$ 交 BC 于点 H，由题意，知 AH,AD,AP 两两垂直，以 A 为坐标原点，AH,AD,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系．

则 $P(0,0,1)$，$E(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$C(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$，$D(0,1,0)$．

∴ $\overrightarrow{PE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$．(7分)

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，∴ $\begin{cases}y-z=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0\end{cases}$，令 $x=-1$，得 $y=\sqrt{3}, z=\sqrt{3}$，

∴ $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},\sqrt{3})$ 是平面 PCD 的一个法向量．(9分)

设直线 PE 与平面 PCD 所成的角为 θ，

∴ $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PE},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{PE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PE}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$，(11分)

∴直线 PE 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{14}$．(12分)

说明：第(1)问解答中：

1．"∴四边形 $ABED$ 为平行四边形，"后面这样写"∴四边形 $ABED$ 为平行四边形，且 $\triangle ABD$ 为等腰三角形，设 $AE \cap BD=O$，则 $AO \perp BD$，得到 $AE \perp BD$"同样给2分．

2. 4分段中，无"$BD\subset$平面$ABCD$"，不扣分。

3. 5分段中，无"$AE,PA\subset$平面PAE，且$AE\cap PA=A$"，不扣分

第（2）问解答中：

1. 没有建立坐标系的指导过程，直接写出所建系的，但且$\overrightarrow{PE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$都写对了的，给6分。

2. 7分段在9分段，法向量正确，但没有过程，扣1分；过程正确，法向量错误，扣1分。

3. 最后结果写为$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$，不扣分

20.（12分）

【解析】（1）依题意，得$A(-a,0),B(0,b)$，设$|MB|=\lambda$，则$|AM|=2\lambda$，$|AB|=3\lambda$，$a^2+b^2=(3\lambda)^2$①，（1分）

由$AB\perp OM$，可知$|OM|^2=|OA|^2-|AM|^2=|OB|^2-|MB|^2$，即$a^2-(2\lambda)^2=b^2-\lambda^2=\frac{4}{3}$②，（3分）

由①②，解得$a^2=4,b^2=2$，（4分）

∴椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.（5分）

（2）方法一：①当直线EF的斜率不存在时，即$EF\perp x$轴时，$P(\frac{2}{3}\sqrt{3},0)$或$P(-\frac{2}{3}\sqrt{3},0)$，直线$EF$的方程为$x=\frac{2}{3}\sqrt{3}$或$x=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$，代入方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$中，得$y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$，所以$|PE||PF|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}$.（6分）

②当直线EF的斜率存在时，设直线EF的方程为$y=kx+m$，$E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$.

∵直线EF与圆$O:x^2+y^2=\frac{4}{3}$相切于点P，∴圆心O到EF的距离$|OP|=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

即$m^2=\frac{4}{3}(k^2+1)(*)$，（7分）

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，整理，得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

$\Delta=8(4k^2-m^2+2)=\frac{16}{3}(4k^2+1)>0$恒成立，且$x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}$，（8分）

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$，

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=(1+k^2)\frac{2m^2-4}{1+2k^2}-\frac{4k^2m^2}{1+2k^2}+m^2=\frac{3m^2-4k^2-4}{1+2k^2}$，

将(*)式代入上式，得 $x_1x_2+y_1y_2=0$，$\therefore OE\perp OF$.（10 分）

又 $\because OP\perp EF$，$\therefore \triangle OPF\backsim\triangle EPO$，$\therefore \frac{|PF|}{|OP|}=\frac{|OP|}{|PE|}$，$\therefore |PE||PF|=|OP|^2=\frac{4}{3}$.

综上可得，$|PE||PF|$ 为定值 $\frac{4}{3}$.（12 分）

方法二：设 $P(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta,\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta)$，直线 EF 的倾斜角为 α，则 EF 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta+t\cdot\cos\alpha\\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta+t\cdot\sin\alpha\end{cases}$

（t 为参数），代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，（6 分）

整理，得 $(\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha)t^2+(\frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\theta\cos\alpha+\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\theta\sin\alpha)t+\frac{4}{3}\cos^2\theta+\frac{8}{3}\sin^2\theta-4=0$.（8 分）

设点 E,F 对应的参数分别为 t_1,t_2，

则 $|PE||PF|=|t_1\cdot t_2|=\frac{|\frac{4}{3}\cos^2\theta+\frac{8}{3}\sin^2\theta-4|}{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}=\frac{4}{3}\times\frac{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}$.（10 分）

$\because OP\perp EF$，$\therefore \sin^2\theta=\cos^2\alpha$，$\cos^2\theta=\sin^2\alpha$.

$\therefore |PE||PF|=\frac{4}{3}$，是定值.（12 分）

说明：第（1）问解答中：另解

直线 AB 的方程为：$\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1$，即 $bx-ay+ab=0$，（1 分）

圆心 $(0,0)$ 到直线 AB 的距离为：$d=\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，即 $4(b^2+a^2)=3a^2b^2$，①（2 分）

由 $|AM|=2|BM|$，则 $\sqrt{a^2-\frac{4}{3}}=2\sqrt{b^2-\frac{4}{3}}$，即 $a^2+4=4b^2$，②（3 分）

由①②解得 $a^2=4,b^2=2$，（4 分）

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.（5 分）

第（2）问解答中：

当 P 为点 M 时，$|PE|=|MA|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$|PF|=|MB|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，得到 $|PE||PF|=\frac{4}{3}$，此处给 1 分，如果一般情计算正确，此处不重复给分.

1.（12 分）

【解析】(1) 设直线 $y=-x+a$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切于点 $P(x_0,y_0)$，

求导，得 $f'(x)=a-2x-\frac{1}{x}$，（1分）

则 $a-2x_0-\frac{1}{x_0}=-1$，即 $a=2x_0+\frac{1}{x_0}-1$ ①，

由题意知 $ax_0-x_0^2-\ln x_0=-x_0+a$ ②，

由①②消去 a 得，$x_0^2-2x_0-\frac{1}{x_0}-\ln x_0+2=0$，（3分）

设 $h(x)=x^2-2x-\frac{1}{x}-\ln x+2$，$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则 $h'(x)=2x-2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=(x-1)(2-\frac{1}{x^2})$，

当 $x\in(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，也是最小值，$h(1)=1-2-1+2=0$，

所以 $h(x)=x^2-2x-\frac{1}{x}-\ln x+2(x>\frac{\sqrt{2}}{2})$ 有唯一零点1，即 $x_0^2-2x_0-\frac{1}{x_0}-\ln x_0+2=0$ 有唯一根1，（5分）

所以 $a=2+1-1=2$，（6分）

（2）由题意，知 $g(x)=ax-x^2-\ln x+(a^2+1)\ln x=ax-x^2+a^2\ln x$，$x>0$，

则 $g'(x)=a-2x+\frac{a^2}{x}=\frac{(2x+a)(-x+a)}{x}$，（7分）

当 $a=0$ 时，$g(x)=-x^2<0$，无零点；（8分）

当 $a>0$ 时，若 $x\in(0,a)$，则 $g'(x)>0,g(x)$ 单调递增，若 $x\in(a,+\infty)$，则 $g'(x)<0,g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)$ 在 $x=a$ 处取得极大值，也是最大值，$g(a)=a^2\ln a$，（9分）

欲使 $g(x)$ 有两个零点，则 $g(a)=a^2\ln a>0$，解得 $a>1$，

又 $g(\frac{1}{e})=\frac{a}{e}-\frac{1}{e^2}-a^2=\frac{-a^2e^2+ae-1}{e^2}=-\frac{(ae-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{e^2}<0$，

且 $\frac{1}{e}<a$，所以 $\exists x_1\in(\frac{1}{e},a)$，使 $g(x_1)=0$，

易证当 $x>0$ 时，$x>\ln x$，所以 $g(x)=ax-x^2+a^2\ln x<ax-x^2+a^2x,x>a$，

所以 $g(a^2+a+1)<(a^2+a+1)(-a^2-a-1+a^2+a)=-(a^2+a+1)<0$，

所以 $\exists x_2\in(a,a^2+a+1)$，使 $g(x_2)=0$，故 $g(x)$ 有两个零点.（10分）

当 $a<0$ 时，若 $x\in(0,-\frac{a}{2})$，则 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，若 $x\in(-\frac{a}{2},+\infty)$，则 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)$ 在 $x=-\frac{a}{2}$ 处取得极大值，也是最大值，$g(-\frac{a}{2})=-\frac{3}{4}a^2+a^2\ln(-\frac{a}{2})$，要使 $g(x)$ 有两个零点，

则 $g(-\frac{a}{2})=-\frac{3}{4}a^2+a^2\ln(-\frac{a}{2})>0$，解得 $a<-2e^{\frac{3}{4}}$，（11 分）

又 $g(\frac{1}{e})=\frac{a}{e}-\frac{1}{e^2}-a^2=-\frac{(ae-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{e^2}<0$，$g(a^2+a+1)<0$，且 $\frac{1}{e}<-\frac{a}{2}<a^2+a+1$，

所以 $\exists x_3\in(\frac{1}{e},-\frac{a}{2})$，$x_4\in(-\frac{a}{2},a^2+a+1)$，使 $g(x_3)=g(x_4)=0$。

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2e^{\frac{3}{4}})\cup(1,+\infty)$。（12 分）

说明：第（1）问解答中：

3 分到 5 分段，没有用函数的单调性说明只有唯一个根，并且看出了方程 $x_0^2-2x_0+\frac{1}{x_0}-\ln x_0+2=0$ 的一个根为 $x_0=1$，到此处可得 4 分。

第（2）问解答中：

9 分到 10 分段，得到了 $a>1$，未说明两端函数值的正负，此处给了 1 分之后，[illegible] 分。

如果两端使用极限说明 $g(x)>0$，该部分以不扣分；10 分到 11 分段同理

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．（10 分）[选修 4-4：坐标系与参数方程]

【解析】（1）由 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$ 得，$\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$，（1 分）

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，代入得 $y^2=4x$，（2 分）

当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时，$\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$，（3 分）

消去 t，得 $x-y-1=0$。

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4x$，直线 l 的普通方程为 $x-y-1=0$。（4 分）

（2）设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，将 $\begin{cases}x=1+t\cos\varphi\\ y=t\sin\varphi\end{cases}$ 代入 $y^2=4x$ 得，

$t^2\sin^2\varphi-4t\cos\varphi-4=0$，（5 分）

$\therefore t_1+t_2=\frac{4\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$，$t_1t_2=\frac{-4}{\sin^2\varphi}<0$，$\therefore t_1,t_2$ 异号，（6 分）

$\therefore ||AF|-|BF||=||t_1|-|t_2||=|t_1+t_2|=\frac{8}{3}$，（7 分）

$\therefore |\frac{4\cos\varphi}{\sin^2\varphi}|=\frac{8}{3}$，（8 分）

解得$\cos\varphi=\frac{1}{2}$或$\cos\varphi=-\frac{1}{2}$（9 分）

$\because \varphi\in(0,\pi)$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$或$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore$直线l的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$．（10 分）

说明：第（1）问解答中：

当$\varphi=\frac{\pi}{4}$时，直接得到$x-y-1=0$不扣分．

第（2）问解答中：

$\cos\varphi=\frac{1}{2}$与$\cos\varphi=-\frac{1}{2}$只得到一个，扣1分；$\varphi=\frac{\pi}{3}$与$\varphi=\frac{2\pi}{3}$中，只得到一个答案，扣1分．

23．（10 分）[选修 4-5：不等式选讲]

【解析】（1）当$a=1$时，$f(x)=|x+1|+2|x|$，

当$x<-1$时，不等式$f(x)\le 4$等价于$-x-1-2x\le 4$，解得$x\ge -\frac{5}{3}$，则$-\frac{5}{3}\le x<-1$；（2 分）

当$-1\le x\le 0$时，不等式$f(x)\le 4$等价于$x+1-2x\le 4$，解得$x\ge -3$，则$-1\le x\le 0$；（3 分）

当$x>0$时，不等式$f(x)\le 4$等价于$x+1+2x\le 4$，解得$x\le 1$，则$0<x\le 1$．（4 分）

综上可得，不等式$f(x)\le 4$的解集为$[-\frac{5}{3},1]$．（5 分）

（2）方法一：当$a<0$时，$-\frac{1}{a}>0$，则$f(x)=\begin{cases}(a-2)x+1, x\le 0\\(a+2)x+1, 0<x<-\frac{1}{a}\\(-a+2)x-1, x\ge -\frac{1}{a}\end{cases}$

$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,-\frac{1}{a})$上是单调的函数或常函数，在$(-\frac{1}{a},+\infty)$上单调递增，$\therefore f(x)$的

最小值为$\min\{f(0),f(-\frac{1}{a})\}$，$\because f(0)=1$，要使$f(x)$的最小值为1，则$f(-\frac{1}{a})=-\frac{2}{a}\ge 1$，$\therefore -2\le a<0$；（7

当$a=0$时，$f(x)=2|x|+1$，其最小值为1，符合题意；（8 分）

当$a>0$时，$-\frac{1}{a}<0$，则$f(x)=\begin{cases}(-a-2)x-1, x\le -\frac{1}{a}\\(a-2)x+1, -\frac{1}{a}<x<0\\(a+2)x+1, x\ge 0\end{cases}$

$f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(-\frac{1}{a},0)$ 上是单调的函数或常函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

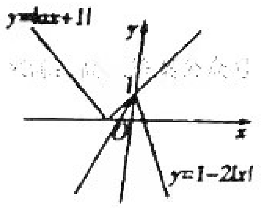
$\therefore f(x)$ 的最小值为 $\min\{f(0),f(-\frac{1}{a})\}$.$\because f(0)=1$，要使 $f(x)$ 的最小值为1，则 $f(-\frac{1}{a})=\frac{2}{a}\ge 1$，$\therefore 0<a\le 2$.

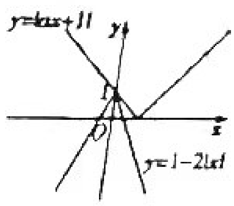
（9分）

综上可得，实数 a 的取值范围是 $[-2,2]$.（10分）

方法二：若 $f(x)$ 的最小值为1，则 $f(x)=|ax+1|+2|x|\ge 1$ 恒成立.（6分）

即 $|ax+1|\ge 1-2|x|$，分别作出函数 $y=|ax+1|$ 和 $y=1-2|x|$ 的图象.（8分）





由图分析可知，当 $-2\le a\le 2$ 时，$|ax+1|\ge 1-2|x|$ 恒成立.

所以实数 a 的取值范围是 $[-2,2]$.（10分）

说明：第（2）问用方法二解答中：未作图扣1分.


微信搜一搜
自主选拔在线