

## “皖南八校”2022 届高三第三次联考

### 数学(理科)

“皖八”理事会(18校) 审定:含山中学(戴德文) 广德中学(杨卫群) 2022.4

#### 考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 本卷命题范围:高考范围。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 集合  $A = \{x | -1 < x < 3\}$ , 集合  $B = \{x | x^2 < 4\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $(-2, 2)$       B.  $(-1, 2)$       C.  $(-2, 3)$       D.  $(-1, 3)$
2. 已知复数  $z = \frac{1+ai}{1+i}$  为纯虚数(其中  $i$  为虚数单位), 则实数  $a =$   
A. 1      B. -1      C. 2      D. -2
3. 正项等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_5, 4a_3, -2a_1$  成等差数列, 若  $a_2 = \frac{1}{2}$ , 则  $a_1 a_7 =$   
A. 4      B. 8      C. 32      D. 64
4. 若向量  $a = (1, -1)$ ,  $b = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , 且  $\langle a, b \rangle = \frac{2\pi}{3}$ , 则  $a \cdot b$  的值为  
A.  $-2\sqrt{2}$       B.  $2\sqrt{2}$       C.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. 已知  $a = 2^{0.9}$ ,  $b = 3^{0.5}$ ,  $c = 2\sin 1$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为  
A.  $a < b < c$       B.  $b < c < a$       C.  $c < a < b$       D.  $c < b < a$
6. 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} y \geq 2|x| - 1, \\ y \leq x + 1 \end{cases}$  且  $z = kx + y$  ( $k$  为常数) 取得最大值的最优解有无数多个, 则  $k$  的值为  
A. 1      B. -1      C. 2      D. -2
7. 已知  $\tan \alpha \tan \beta = 1$ , 则  $\cos \alpha \cos \beta$  的最大值为  
A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【第 26 届“皖八”高三 3 联·数学 第 1 页(共 4 页) 理科】 HD—221003C

8. 古希腊亚历山大时期最后一位重要的几何学家帕普斯(Pappus, 公元 3 世纪末)在其代表作《数学汇编》中研究了“三线轨迹”问题:即到两条已知直线距离的乘积与到第三条直线距离的平方之比等于常数的动点轨迹为圆锥曲线. 今有平面内三条给定的直线  $l_1, l_2, l_3$ , 且  $l_2, l_3$  均与  $l_1$  垂直. 若动点  $M$  到  $l_2, l_3$  的距离的乘积与到  $l_1$  的距离的平方相等, 则动点  $M$  在直线  $l_2, l_3$  之间的轨迹是
- A. 圆                      B. 椭圆                      C. 双曲线                      D. 抛物线
9. 若将函数  $y = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 的图像向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度后, 与函数  $y = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图像重合, 则  $\omega$  的最小值是
- A.  $\frac{21}{4}$                       B.  $\frac{19}{4}$                       C.  $\frac{17}{4}$                       D.  $\frac{15}{4}$
10. 已知抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上有两点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}$  是  $y_1 y_2 = -p^2$  的
- A. 充要条件                      B. 充分不必要条件  
C. 必要不充分条件                      D. 既不充分也不必要条件
11. 甲、乙两名同学各自从 6 门不同的校本选修课中任选 3 门研修, 则甲、乙两名同学所选课程至少有一门相同的选法种数为
- A. 400                      B. 390                      C. 380                      D. 370
12. 若存在直线与函数  $f(x) = e^x - 1, g(x) = \ln(x - a)$  的图像都相切, 则实数  $a$  的取值范围是
- A.  $[-e, +\infty)$                       B.  $[-2, +\infty)$   
C.  $[-1, +\infty)$                       D.  $\left[-\frac{e}{2}, +\infty\right)$

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 若直线  $l_1: x + 2ay + 4 = 0$  与  $l_2: ax + 2y + a + 3 = 0$  平行, 则实数  $a$  的值是\_\_\_\_\_.
14. 已知双曲线  $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为  $\sqrt{5}$ , 则其渐近线方程为\_\_\_\_\_.
15. 若  $\left(x + \frac{1}{2x} - \sqrt{2}\right)^n$  展开式的常数项为  $\frac{35}{2}$ , 则正整数  $n$  的值为\_\_\_\_\_.
16. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, & n \text{ 为奇数,} \\ 3a_n, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$  记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若存在正整数  $m, k$ , 使得  $\frac{S_{2m}}{S_{2m-1}} = a_k$ , 则  $m$  的值是\_\_\_\_\_.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

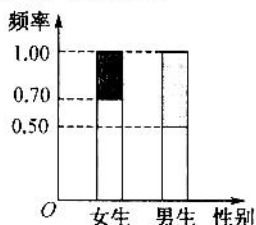
在 $\triangle ABC$ 中,角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ ,已知 $\sin C = (3 - \cos C)\tan B$ .

(1)求 $\frac{a}{b}$ 的值;

(2)求 $\cos B$ 的最小值.

18. (本小题满分 12 分)

2022 年 2 月 4 日,北京冬奥会在国家体育场盛大开幕. 这是北京时隔 14 年再次举办奥运会,北京成为历史上首个既举办过夏季奥运会,又举办过冬季奥运会的城市. 为了了解某中学高一学生对冬奥会开幕式的关注程度,从该校高一学生中随机抽取了 100 名学生进行调查,调查样本中有 40 名女生. 下图是根据样本的调查结果绘制的等高条形图(阴影区域表示关注冬奥会开幕式的部分).



	关注	没关注	合计
男			
女			
合计			

(1)完成上面的 $2 \times 2$ 列联表,并计算回答是否有 95% 的把握认为“对冬奥会开幕式的关注与性别有关”?

(2)若将频率视为概率,现从该中学高一女生中随机抽取 3 人. 记被抽取的 3 名女生中对冬奥会开幕式关注的人数为随机变量 $X$ ,求 $X$ 的分布列及数学期望.

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.010	0.005
$k_0$	2.072	2.706	3.841	6.635	7.879

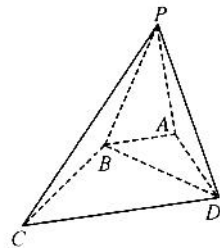
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a + b + c + d.$$

19. (本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle PAB = 90^\circ$ ,底面 $ABCD$ 为梯形, $AB \parallel CD$ , $CD = 2AB = 2\sqrt{2}$ , $BC = BD$ .  $\triangle PAD$ 中, $\angle PAD = 120^\circ$ , $PA = AD = 2$ .

(1)求三棱锥 $P-ABD$ 的体积;

(2)求二面角 $B-PD-C$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^x(a-x) + x + 1$ .

- (1) 若函数  $f(x)$  的图象在区间  $[0, 1]$  上存在斜率为零的切线, 求实数  $a$  的取值范围;  
 (2) 当  $a=1$  时, 判断函数  $f(x)$  零点的个数, 并说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  的椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  与  $x$  轴,  $y$  轴正半轴交于  $A, B$  两点, 作直线  $AB$  的平行线交椭圆于  $C, D$  两点.

- (1) 若  $\triangle AOB$  的面积为 1, 求椭圆的标准方程;  
 (2) 在 (1) 的条件下,  
 (i) 记直线  $AC, BD$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 求证:  $k_1 k_2$  为定值;  
 (ii) 求  $|CD|$  的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2 + 2\rho\cos\theta - m = 0$ .

- (1) 写出直线  $l$  的普通方程和曲线  $C$  的直角坐标方程;  
 (2) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 设直线  $l$  与曲线  $C$  相交于  $A, B$  两点. 若点  $P(-1, 2)$  恰为线段  $AB$  的一个三等分点, 求正数  $m$  的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

已知函数  $f(x) = |x+a| - |x-1|$

- (1) 当  $a=2$  时, 解不等式  $f(x) > 2$ ;  
 (2) 若不等式  $f(x) < |x-4|$  对任意  $x \in [0, 2]$  都成立, 求实数  $a$  的取值范围.



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

