高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由题意得 $A=[-1,3]$，$B=(a,+\infty)$，因为 $A\cap B=\varnothing$，所以 $a\geqslant 3$. 故选 A.

2. C　由 $(8+6i)z=5+12i$，得 $z=\frac{5+12i}{8+6i}$，所以 $|z|=\frac{|5+12i|}{|8+6i|}=\frac{\sqrt{5^2+12^2}}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{13}{10}$. 故选 C.

3. D　l_2 的方程可化为 $x+\frac{m}{2}y+\sqrt{5}-1=0$，因为 $l_1/\!/l_2$，易知 $m=-4$，所以 l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\frac{|(\sqrt{5}-1)-(-1)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$ $=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$. 故选 D.

4. C　由题意知 $\tan\theta_1=2$，$\tan\theta_2=3$，所以 $\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{2-3}{1+2\times 3}=-\frac{1}{7}$. 故选 C.

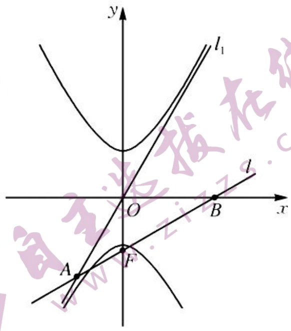
5. B　若 $m=0$，点 P 的轨迹为线段 F_1F_2 的垂直平分线，不是双曲线；反之，若 P 的轨迹是双曲线，则一定满足"$||PF_1|-|PF_2||$ 的值为定值 m，且 $m<|F_1F_2|$". 于是"$||PF_1|-|PF_2||$ 的值为定值 m，且 $m<|F_1F_2|$"是"点 P 的轨迹是双曲线"的必要不充分条件. 故选 B.

6. D　由 $|\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2|\leqslant\sqrt{3}$，得 $5-4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\leqslant 3$，即 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\geqslant\frac{1}{2}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1|\cdot|\boldsymbol{e}_2|}\geqslant\frac{1}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle\in[0,\pi]$，所以 $0\leqslant\langle\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\rangle\leqslant\frac{\pi}{3}$，故 A 错误；$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{e}_1^2+\boldsymbol{e}_2^2-2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\leqslant 1$，所以 $|\boldsymbol{a}|_{\max}=1$，故 B 错误；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1{}^2-\boldsymbol{e}_2{}^2-2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\leqslant 1$，故 C 错误；$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4+4+8\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\geqslant 12$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant 2\sqrt{3}$，故 D 正确. 故选 D.

7. B　法一：由题意知，$a=2$，$b=1$，故半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，故 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，线段 AB 的方程为 $x-2y+2=0\ (0\leqslant y\leqslant 1)$. 设点 $P(2m-2,m)\ (0\leqslant m\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{PF_1}=(-\sqrt{3}+2-2m,-m)$，$\overrightarrow{PF_2}=(\sqrt{3}+2-2m,-m)$，所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=5m^2-8m+1=5\left(m-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{11}{5}$，所以当 $m=\frac{4}{5}$ 时，$(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\min}=-\frac{11}{5}$；当 $m=0$ 时，$(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\max}=1$. 故 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围为 $\left[-\frac{11}{5},1\right]$. 故选 B.

法二：由题意知 $a=2$，$b=1$，故半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$. 作 $OP_0\perp AB$ 于点 P_0，则 P_0 在线段 AB 上，直线 AB 的方程为 $x-2y+2=0$，由点到直线的距离公式，得 $|OP_0|=\frac{|0-2\times 0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. 而 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OF_2}^2=\overrightarrow{PO}^2-3$，因此 $(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\min}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-3=-\frac{11}{5}$. 又因为 $|OP|\leqslant|OA|=2$，所以 $(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\max}=2^2-3=1$. 因此 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围为 $\left[-\frac{11}{5},1\right]$. 故选 B.

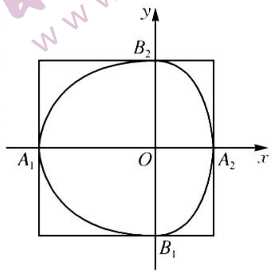
8. A　因为 $x>0$，所以 $f(x)>0$. 又 $a_1=1$，所以 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}<a_n$，所以 $\{a_n\}$ 为递减数列，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\leqslant a_1=1$，因为 $a_2=\frac{a_1}{1+\sqrt{a_1}}=\frac{1}{2}$，所以 $S_{2\,022}>a_1+a_2=\frac{3}{2}$；由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$，得 $a_{n+1}+a_{n+1}\sqrt{a_n}=a_n$，所以 $a_{n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{\sqrt{a_n}}$，又 $\sqrt{a_n}=\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_n}}{2}>\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}{2}$，所以 $a_{n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{\sqrt{a_n}}<\frac{2(a_n-a_{n+1})}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=2(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}})$，所以 $S_{2\,022}<1+2(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\cdots+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}})=3-2\sqrt{a_{n+1}}<3$. 故选 A.



9. BD　由题意知 l 的倾斜角为 $30°$，因为 $|OA|=|OB|$，所以 l_1 的倾斜角为 $60°$，故其斜率为 $\sqrt{3}$，即 $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；$l_1$ 的方程为 $ax-by=0$，又 $F(0,-\sqrt{a^2+b^2})$，所以 F 到 l_1 距离 $d=\frac{|b\sqrt{a^2+b^2}|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$. 故选 BD.

10. AC　由图象知 $\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，故 A 正确；由 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=0$，得 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$；由 $f(0)=1$，得 $A\sin\frac{\pi}{6}=1$，故 $A=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$. 由 $g(-\pi)=2$ 得 $g(x)$ 的图象不关于点 $(-\pi,0)$ 对称，故 B 不正确；由 $-\pi+2k\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $-\frac{\pi}{2}+k\pi\leqslant x\leqslant k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，令 $k=1$，得 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，又 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，故 $g(x)$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递增，故 C 正确；当 $x\in(0,\pi)$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上仅有一个极值点，故 D 不正确. 故选 AC. 更多试题与答案，关注微信公众号：三晋高中指南

11. BC　因为对任意正数 a,b，当 $a<b$ 时，$bf(a)>af(b)$，即 $\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$ 恒成立，所以 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\log_2 3>\log_2\sqrt{8}=\frac{3}{2}=\log_3\sqrt{27}>\log_3 4$，所以 $g(\log_2 3)<g(\log_3 4)$，即 $f(\log_2 3)\log_3 2<f(\log_3 4)\log_4 3$，故 A 错误；因为 $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$，故 $g\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{3}\right)$，即 $2f\left(\frac{1}{2}\right)<3f\left(\frac{1}{3}\right)$，故 B 正确；因为 $\forall x>0,f(x)<0$，所以 $0<-\frac{f(a)}{a}<-\frac{f(b)}{b}$，$0<a^2<b^2$，所以 $-af(a)<-bf(b)$，即 $af(a)>bf(b)$，所以 $h(x)=xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 令 $m(x)=\frac{\ln x}{x}(x>\mathrm{e})$，则 $m'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0(x>\mathrm{e})$，所以 $m(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，$\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$，所以 $h\left(\frac{\ln 3}{3}\right)<h\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$，即 $\frac{\ln 2}{2}f\left(\frac{\ln 2}{2}\right)>\frac{\ln 3}{3}f\left(\frac{\ln 3}{3}\right)$，故 C 正确，D 错误. 故选 BC.

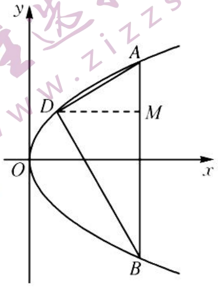


12. ABC　过曲线 E 与坐标轴的交点作相应坐标轴的垂线(如图所示)，以四条线的交点为顶点的四边形为边长是 6 的正方形，曲线 E 在该正方形内，故 E 及其内部区域的面积小于正方形的面积 36，故 A 正确；曲线 E 的对称轴仅有 x 轴，且 E 与 x 轴仅有 2 个公共点，故 B 正确；若 $k=0$，此时可设 l 的方程为 $y=t$，易求 A,B 的坐标分别为 $\left(-\frac{4}{3}\sqrt{9-t^2},t\right)$，$\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-t^2},t\right)$，故 AB 中点坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{9-t^2}}{3},t\right)$，设 $P(x,y)$，故 $x=-\frac{\sqrt{9-t^2}}{3}$，$y=t$，消去 t 得 $x^2+\frac{y^2}{9}=1(x<0)$，即 P 的轨迹在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 上，若 $k\neq 0$，设 l 的方程为 $y=kx+n$，若 A,B 均在 C_1 上，利用点差法，易求 $k_{OP}=-\frac{9}{16k}$，同理若 A,B 均在 C_2 上，易求 $k_{OP}=-\frac{9}{4k}$，显然 $-\frac{9}{16k}\neq-\frac{9}{4k}$，故此时点 P 不可能总落在某条直线上，故 C 正确，D 错误. 故选 ABC.

13. $4x-2y+6-\pi=0$　由题意得 $f'(x)=2\cos 2x+\frac{1}{\cos^2 x}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$，所以 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2$，故所求切线方程为 $y-3=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，即 $4x-2y+6-\pi=0$.

14. $x-2=0$ 或 $4x+3y-11=0$　若 l 的斜率不存在，则 l 的方程为 $x=2$，是圆 C 的切线；若 l 的斜率存在，设 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $kx-y+1-2k=0$，则 $\frac{|1-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得 $k=-\frac{4}{3}$，此时 l 的方程为 $4x+3y-11=0$，故直线 l 的方程为 $x-2=0$，或 $4x+3y-11=0$.

15. 2　设直线 AD 为 $x=my+n(m\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则 $B(x_1,-y_1)$，由 $\begin{cases} y^2=2px, \\ x=my+n \end{cases}$ 得 $y^2-2pmy-2pn=0$，所以 $y_1+y_2=2pm$，因为 $AD\perp BD$，故 $k_{AD}\cdot k_{BD}=-1$，即 $\frac{1}{m}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}=-1$，所以 $\frac{1}{m}\cdot\frac{2pm}{x_2-x_1}=-1$，所以 $\frac{x_2-x_1}{p}=-2$，作 $DM\perp AB$ 垂足为 M，则点 D 到直线 $x=t$ 的距离为 $|DM|=|x_1-x_2|$，所以 $\frac{|DM|}{p}=2$.



16. $\left[\frac{2}{\ln 2},+\infty\right)$　$f'(x)=ax-e^x$，则 x_1,x_2 是 $f'(x)=0$，即 $ax=e^x$ 的两个根，则 $ax_1=e^{x_1}$，所以 $\ln ax_1=x_1$，同理 $\ln ax_2=x_2$，设 $\frac{x_2}{x_1}=t\,(t\geqslant 2)$，则 $x_2=tx_1$，代入 $\ln ax_2=x_2$，得 $\ln ax_1+\ln t=tx_1$，所以 $x_1=\frac{\ln t}{t-1}$. 令 $u=\frac{\ln t}{t-1}$，则 $u'=\frac{t-1-t\ln t}{t(t-1)^2}$，令 $m(t)=t-1-t\ln t$，则 $m'(t)=-\ln t<0$，所以 $m(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，所以 $m(t)\leqslant m(2)=1-2\ln 2<0$，所以 $u=\frac{\ln t}{t-1}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，所以 $0<u\leqslant\ln 2$；因为 $ax_1=e^{x_1}$，所以 $a\cdot u=e^u$，所以 $a=\frac{e^u}{u}$，易知 $y=\frac{e^u}{u}$ 在 $(0,\ln 2]$ 上单调递减，所以 $a\geqslant\frac{2}{\ln 2}$，故 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{\ln 2},+\infty\right)$.

17. 解：(1) 由 $a\sin A-c\sin C=(b-c)\sin B$ 及正弦定理，得 $a^2-c^2=b^2-bc$，

所以 $b^2+c^2-a^2=bc$，………………………………………………………… 2 分

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$. ………………………………………………… 3 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 4 分

(2) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

得 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$，………………………… 7 分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以

$\begin{cases} 0<C<\frac{\pi}{2}, \\ 0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 所以 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，………………………………………………… 8 分

所以 $\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}<2$，即 $\frac{b}{c}$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},2\right)$. …………………… 10 分

18. (1) 解：由题意知 $F(-4,0)$，$P(1,s)$，设点 $Q(x_0,y_0)$，因为 Q 为线段 FP 与 E 的交点，且 $\left|\frac{FP}{FQ}\right|=t$，所以 $\overrightarrow{FP}=t\overrightarrow{FQ}$，

……………………………………………………………………………………… 2 分

又 $\overrightarrow{FP}=(5,s)$，$\overrightarrow{FQ}=(x_0+4,y_0)$，所以 $x_0=\frac{5}{t}-4$，$y_0=\frac{s}{t}$，即 $Q\left(\frac{5}{t}-4,\frac{s}{t}\right)$，

所以 $\frac{(5-4t)^2}{4t^2}-\frac{s^2}{12t^2}=1$，化简，得 $s^2=36t^2-120t+75$. ……………………………………

因为 $s^2\geqslant0$，结合 $t>0$，$\frac{5}{t}-4<0$，所以 $t\geqslant\frac{5}{2}$，

所以 $s^2=36t^2-120t+75\left(t\geqslant\frac{5}{2}\right)$. ············ 6 分

(2)证明：设 $P(1,s)$，由(1)知 $s^2=36t^2-120t+75$，且 $t\geqslant\frac{5}{2}$，

所以 $|FP|=\sqrt{5^2+s^2}=\sqrt{36t^2-120t+100}=6t-10$，············ 8 分

所以 $t=\frac{1}{6}|FP|+\frac{5}{3}$， ············ 10 分

所以 $\left|\frac{FP}{FQ}\right|=\frac{1}{6}|PF|+\frac{5}{3}$，即存在 $m=\frac{1}{6}$，$n=\frac{5}{3}$，使得 $\left|\frac{FP}{FQ}\right|=m|PF|+n$ 成立. ············ 12 分

19.(1)解：当 $n=2$ 时，$a_1=\frac{a_2-1}{2}$，所以 $a_2=3$；············ 1 分

当 $n\geqslant3$ 时，$a_1+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{2n-5}=\frac{a_{n-1}-1}{2}$，

与 $a_1+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2n-3}=\frac{a_n-1}{2}$ 两边分别作差，得 $\frac{a_{n-1}}{2n-3}=\frac{a_n-1}{2}-\frac{a_{n-1}-1}{2}$，

化简，得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2n-1}{2n-3}(n\geqslant3)$，············ 3 分

所以当 $n\geqslant3$ 时，$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_3}{a_2}\times a_2=\frac{2n-1}{2n-3}\times\frac{2n-3}{2n-5}\times\cdots\times\frac{5}{3}\times3=2n-1$. ············ 5 分

显然 $n=1,2$ 时上式仍成立，故对任意正整数 n，$a_n=2n-1$. ············ 6 分

(2)证明：由(1)知 $a_2=3$，所以 $b_1=1$，$b_2=2$. ············ 7 分

因为 $\ln b_n+\ln b_{n+2}=2\ln b_{n+1}$，所以 $b_nb_{n+2}=b_{n+1}^2$，

所以 $\{b_n\}$ 为等比数列，且公比 $q=\frac{b_2}{b_1}=2$，所以 $b_n=2^{n-1}$，············ 8 分

所以 $T_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，············ 9 分

所以 $T_n\cdot T_{n+2}=(2^n-1)(2^{n+2}-1)=2^{2n+2}-(2^n+2^{n+2})+1=2^{2n+2}-5\times2^n+1$.

又 $T_{n+1}^2=(2^{n+1}-1)^2=2^{2n+2}-4\times2^n+1$，所以 $T_n\cdot T_{n+2}<T_{n+1}^2$. ············ 12 分

20.解：(1)法一：当 $a=0$ 时，显然 $l_1\perp l_2$，且 l_1 与 l_2 的交点为 $(-2,0)$； ············ 1 分

当 $a\neq0$ 时，l_1 与 l_2 的斜率分别为 $k_{l_1}=\frac{1}{a}$，$k_{l_2}=-a$，············ 2 分

$k_{l_1}\cdot k_{l_2}=-1$，所以 $l_1\perp l_2$，故对任意实数 a，$l_1\perp l_2$. ············ 3 分

直线 l_1 过定点 $A(-2,0)$，l_2 过定点 $B(2,0)$，············ 4 分

设 $P(x,y)$，则 $PA\perp PB$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，

所以 $(x+2)(x-2)+y^2=0$，即 $x^2+y^2=4$.

又点 $(2,0)$ 不是 l_1 与 l_2 的交点，

故曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=4(x\neq2)$. ············ 6 分

法二：(消参法)当 $y\neq0$ 时，由 $x-ay+2=0$，得 $a=\frac{x+2}{y}$，代入 $ax+y-2a=0$，得 $\frac{x(x+2)}{y}+y-\frac{2(x+2)}{y}=0$，

化简整理，得 $x^2+y^2=4(y\neq0)$，当 $y=0$ 时，$x=2$ 或 $x=-2$，易验证点 $(-2,0)$ 符合条件，$(2,0)$ 不符合条件，故曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=4(x\neq2)$. ············ 6 分

(2)圆 E 与曲线 C 的方程两边作差，得 $mx+ny-2=0(x\neq2)$，即为直线 MN 的方程. ············

因为$|MN|=2\sqrt{3}$，所以点O到直线MN的距离$d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{m^2+n^2}}=1$，

即$m^2+n^2=4$. ① …… 9分

因为圆E的圆心(m,n)在直线$y=\sqrt{3}x$上，所以$n=\sqrt{3}m$. ② …… 10分

①②联立，并解得$\begin{cases}m=1,\\n=\sqrt{3},\end{cases}$或$\begin{cases}m=-1,\\n=-\sqrt{3},\end{cases}$

当$\begin{cases}m=1,\\n=\sqrt{3}\end{cases}$时，直线$MN$的方程为$x+\sqrt{3}y-2=0$，过$(2,0)$点，不合题意；

当$\begin{cases}m=-1,\\n=-\sqrt{3}\end{cases}$时，直线$MN$的方程为$x-\sqrt{3}y+2=0$，易验证符合题意.

故m,n的值为$-1,-\sqrt{3}$. …… 12分

21.(1)解：由题意知$A(-a,0)$，$B(0,b)$，

所以直线AB的方程为$\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{b}=1$，即$bx-ay+ab=0$. …… 1分

因为$F_1(-1,0)$到AB的距离为$\dfrac{\sqrt{7}}{7}|OB|$，即$\dfrac{|-b+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}b$. …… 2分

所以$7(a-1)^2=a^2+b^2$，又$a^2-b^2=1$，解得$a=\dfrac{4}{5}$(舍去)，或$a=2$.

所以$a^2=4$，$b^2=3$. …… 3分

所以C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …… 4分

(2)证明：椭圆C的3倍相似椭圆E的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=3$，即$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$，

设$N(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$， …… 5分

联立l与C的方程，得$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\y=kx+m,\end{cases}$消去$y$并整理，得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

则$\Delta_1=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$，即$4k^2+3>m^2$，

且$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$， …… 6分

所以$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\dfrac{8km}{3+4k^2}\right)^2-\dfrac{4(4m^2-12)}{3+4k^2}}=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2+3-m^2}}{3+4k^2}$. …… 7分

联立l与E的方程，得$\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\y=kx+m,\end{cases}$消去$y$并整理，得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-36=0$，

则$x_3+x_4=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$x_3x_4=\dfrac{4m^2-36}{3+4k^2}$，

所以$|x_3-x_4|=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{12k^2+9-m^2}}{3+4k^2}$， …… 8分

所以$x_1+x_2=x_3+x_4$，所以线段NP，MQ的中点相同，

所以$|MN|=|PQ|$. …… 9分

因为$\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{NQ}$，即$\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NQ}-\overrightarrow{PQ}$，

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NP}$,所以$|MN|=|NP|$,所以$|MQ|=3|NP|$, ………………………… 10 分

所以$|x_3-x_4|=3|x_1-x_2|$,即$\frac{4\sqrt{3}\sqrt{12k^2+9-m^2}}{3+4k^2}=3\times\frac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2+3-m^2}}{3+4k^2}$,

化简,得$4m^2-12k^2=9$,满足$4k^2+3>m^2$,

所以$\frac{4m^2}{9}-\frac{4k^2}{3}=1$,故点$T(k,m)$在双曲线$\frac{4y^2}{9}-\frac{4x^2}{3}=1$上. ………………………… 12 分

22. 解:(1)由题意知函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=2x+1+\frac{a}{x}=\frac{2x^2+x+a}{x}(x>0)$, ………… 1 分

当$a\geqslant 0$时,$f'(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立,故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增; ………… 2 分

当$a<0$时,由$f'(x)<0$,得$0<x<\frac{\sqrt{1-8a}-1}{4}$,由$f'(x)>0$,得$x>\frac{\sqrt{1-8a}-1}{4}$,

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{\sqrt{1-8a}-1}{4}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{\sqrt{1-8a}-1}{4},+\infty\right)$上单调递增. ………… 4 分

(2)若$a=1$,则$g(x)=x+1-(x^2+x+\ln x)=-x^2-\ln x+1$,

由$|x_1g(x_2)-x_2g(x_1)|>\lambda|x_1-x_2|$,$x_1,x_2\in(0,+\infty)$,得$\left|\frac{g(x_2)}{x_2}-\frac{g(x_1)}{x_1}\right|>\lambda\left|\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right|$,① ………… 6 分

设$\varphi(x)=\frac{g(x)}{x}=-x-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$,则$\varphi'(x)=-1-\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=-\frac{x^2+2-\ln x}{x^2}$, ………… 7 分

令$m(x)=x^2+2-\ln x$,则$m'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}(x>0)$,

当$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$m'(x)<0$,当$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$m'(x)>0$,

所以$m(x)$在$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增,

所以$m(x)_{\min}=m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln 2>0$, ………… 9 分

所以$\varphi'(x)<0$在$(0,+\infty)$上恒成立,所以$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

不妨设$x_1>x_2>0$,则$\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}<0$,$\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$,即$\frac{g(x_1)}{x_1}<\frac{g(x_2)}{x_2}$,

所以①式可化为$\frac{g(x_2)}{x_2}-\frac{g(x_1)}{x_1}>\lambda\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)$,即$\frac{g(x_2)}{x_2}-\frac{\lambda}{x_2}>\frac{g(x_1)}{x_1}-\frac{\lambda}{x_1}$对任意$x_1>x_2>0$恒成立. ……… 10 分

设$h(x)=\frac{g(x)}{x}-\frac{\lambda}{x}=-x-\frac{\ln x}{x}+\frac{1-\lambda}{x}$,则$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以$h'(x)=-1-\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1-\lambda}{x^2}\leqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立,

所以$\lambda\leqslant x^2+2-\ln x$在$(0,+\infty)$上恒成立,更多试题与答案,关注微信公众号:三晋高中指南

所以$\lambda\leqslant m(x)_{\min}$,即$\lambda\leqslant\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$,故实数$\lambda$的取值范围为$\left(-\infty,\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\right]$. ………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。