潮州市2023年高考第二次模拟考试数学参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	B	D	D	A	B	ACD	BD	BCD	AC

二、填空题

13. 210　　14. —1　　15. 5　　16. 1344

部分提示：

3.解：因为 $\dfrac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{8}{3}$，所以 $\dfrac{3\tan\alpha+2}{2\tan\alpha-1}=\dfrac{8}{3}$，解得 $\tan\alpha=2$，所以 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{2+1}{1-2\times1}=-3$.

故选：A

4.对于A，已知圆 M：$x^2+y^2-4x+3=0$，则其标准方程为 $(x-2)^2+y^2=1$，$\therefore r=1$，圆心 $M(2,0)$，

点 $(4,0)$ 到圆心 $M(2,0)$ 的距离 $d_1=\sqrt{(4-2)^2+(0-0)^2}=2>r$，所以点 $(4,0)$ 在圆外，A错误；

对于B，由圆的方程 $x^2+y^2-4x-6y-a=0$ 可得，$(x-2)^2+(y-3)^2=13-a$，所以圆心为 $(2,3)$，

半径为 $\sqrt{13-a}$，因为两圆有三条公切线，所以两圆的位置关系为外切，则

$\sqrt{(2-2)^2+(0-3)^2}=3=1+\sqrt{13-a}$，解得 $a=9$，故B选项正确.

对于C，因为圆心 $M(2,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 的距离 $d_2=\dfrac{|2|}{\sqrt{1+3}}=1=r$，所以直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 与圆 M 相切，C选项错误；

对于D，将圆心 $M(2,0)$ 代入直线 $4x+3y-2=0$ 不成立，所以直线不过圆心，则圆 M 不关于直线 $4x+3y-2=0$ 对称，D选项错误.

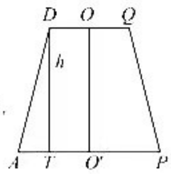
故选：B

5.令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，所以 $-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，又因为 $f(x)$ 在 $[-t,t]$ 上单调递增，

则 $[-t,t]$ 是 $\left[-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 的一个子区间，当 $k=0$ 时，即 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right]$，

若 $[-t,t]$ 是 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 的子集，则 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ 故选:D.



6.设圆台上下底面的半径分别为 r_1,r_2，由题意可知 $\dfrac{1}{3}\times2\pi\times3=2\pi r_1$，解得 $r_1=1$，

$\dfrac{1}{3}\times2\pi\times6=2\pi r_2$，解得：$r_2=2$，作出圆台的轴截面，如图所示：

图中 $OD=r_1=1, O'A=r_2=2$，$AD=6-3=3$，过点 D 向 AP 作垂线，垂足为 T，则 $AT=r_2-r_1=1$，

所以圆台的高 $h=\sqrt{AD^2-AT^2}=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$，

微信号：

则上底面面积$S_1=\pi\times1^2=\pi$，$S_2=\pi\times2^2=4\pi$，由圆台的体积计算公式可得：

$V=\frac{1}{3}\times(S_1+S_2+\sqrt{S_1\cdot S_2})\times h=\frac{1}{3}\times7\pi\times2\sqrt{2}=\frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$，故选：D．

7.设双曲线左焦点为F_1，点A在双曲线右支，根据对称性知四边形AF_1BF是平行四边形．

由已知可得$|AF_1|=|BF|=3|AF|$，又由双曲线的定义知，$|AF_1|-|AF|=2a$．所以$|AF|=a$，$|AF_1|=3a$．

又$|AB|=2|OF|=|FF_1|=2c$．所以四边形AF_1BF是矩形，所以$\angle FAF_1=90°$．

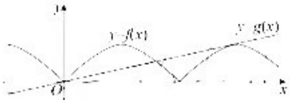
在Rt $\triangle FAF_1$中，有$|AF|^2+|AF_1|^2=|FF_1|^2$，即$a^2+9a^2=4c^2$，

所以$a^2=\frac{2}{5}c^2$，$b^2=c^2-a^2=\frac{3}{5}c^2$，所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{2}$，$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

所以，双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$，整理可得$\sqrt{6}x\pm2y=0$.故选：A.

8.对于A：当$k=1$时，令$y=\sin x-x$，则$y'=\cos x-1\le0$，即函数$y=\sin x-x$在定义域上单调递减，又当$x=0$时$y=0$，所以函数$y=\sin x-x$有且仅有一个零点为0，

同理易知函数$y=-\sin x-x$有且仅有一个零点为0，即$f(x)$与$g(x)$也恰有一个公共点，故A错误；对于B：当$n=3$时，如下图：

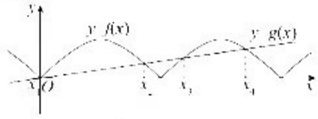


易知在$x=x_3$，且$x_3\in(\pi,2\pi)$，$f(x)$与$g(x)$图象相切，

由当$x\in(\pi,2\pi)$时，$f(x)=-\sin x$，则$f'(x)=-\cos x$，$g'(x)=k$，故$\begin{cases}k=-\cos x_3\\-\sin x_3=kx_3\end{cases}$，从而$x_3=\tan x_3$，

所以$\frac{1}{x_3}+x_3=\tan x_3+\frac{1}{\tan x_3}=\frac{1+\tan^2x_3}{\tan x_3}=\frac{\cos^2x_3(1+\tan^2x_3)}{\cos^2x_3\tan x_3}=\frac{2}{\sin2x_3}$，故B正确；

对于C：当$n=4$时，如下图：



则$x_1=0$，$\pi<x_4<2\pi$，所以$x_1+x_4<2\pi$，

又$f(x)$图象关于$x=\pi$对称，结合图象有$x_3-\pi>\pi-x_2$，即有$x_3+x_2>2\pi>x_1+x_4$，故C错误；

对于D：当$k=\frac{2}{2023\pi}$时，由$f(\frac{2023\pi}{2})=g\left(\frac{2023\pi}{2}\right)=1$，

$f(x)$与$g(x)$的图象在y轴右侧的前1012个周期中，每个周期均有2个公共点，共有2024个公共点，故D错误.故选：B.

9.$\vec{a}-\vec{b}=(-1,-1)$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，A对，$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=(-1,-1)\cdot(1,-1)=-1+1=0$，B错，C对.

向量$\vec{a}=(1,-1)$在向量$\vec{b}=(2,0)$上的投影为：$|\vec{a}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=|\vec{a}|\times\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=1$，投影向量为

自主选拔在线 微信号：z

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\times\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=1\times\frac{(2,0)}{2}=(1,0)$，所以 D 对.故答案为：ACD.

10.对于 A 举反例：0，0，0，4，11，其平均数 $\bar{x}=3<4$，但不符合入冬指标；
对于 B 假设有数据大于或等于 10，由极差小于或等于 3 可知，
则此组数据中的最小值为 $10-3=7$，此时数据的平均数必然大于 7，
与 $\bar{x}<4$ 矛盾，故假设错误.则此组数据全部小于 10. 符合入冬指标；
对于 C 举反例：1，1，1，1，11，平均数 $\bar{x}=3<4$，且标准差 $s=4$，但不符合入冬指标；
对于 D 在众数等于 5 且极差小于等于 4 时，则最大数不超过 9.符合入冬指标.故选：BD.

11.对于 A：$\because n(A)=60$，$n(D)=10$，$n(A\cup D)=70$ $\therefore n(A\cup D)=n(A)+n(D)$，

$\therefore$ A 与 D 互斥，故 A 错误；

对于 B：$\because n(A\cup B)=n(A)+n(B)=n(\Omega)$ $\therefore$ A 与 B 互为对立，故 B 正确；

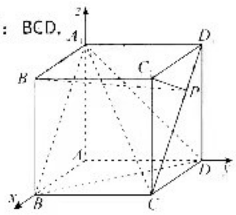
对于 C：$\because P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{5}$，$P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{1}{5}$，$P(A\cap C)=\frac{n(A\cap C)}{n(\Omega)}=\frac{3}{25}$，

$\therefore P(A\cap C)=P(A)P(C)=\frac{3}{25}$，$\therefore$ A 与 C 相互独立，故 C 正确；

对于 D：$\because n(\Omega)=100, n(A)=60, n(B)=40, n(C)=20, n(A\cup B)=100, n(A\cap C)=12$，

$\therefore n(B\cap C)=8$，$\therefore P(B\cap C)=\frac{n(B\cap C)}{n(\Omega)}=\frac{2}{25}$，又$\because P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{2}{5}$，$P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{1}{5}$，

$\therefore P(B\cap C)=P(B)P(C)=\frac{2}{25}$，$\therefore$ B 与 C 相互独立，故 D 正确；故选：BCD.



12.建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$D(0,1,0)$、$C(1,1,0)$、$A_1(0,0,1)$、$C_1(1,1,1)$、$D_1(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{CD_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{B_1C_1}+\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CC_1}=(-\lambda,1,\mu-1)$，

则 $\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，设平面 A_1BD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BA_1}\cdot\vec{n}=(x,y,z)\cdot(-1,0,1)=-x+z=0\\ \overrightarrow{BD}\cdot\vec{n}=(-1,1,0)\cdot(x,y,z)=-x+y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=z=1$，即平面 A_1BD 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)$，

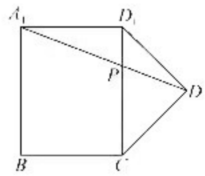
若 B_1P // 平面 A_1BD，则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1P}=0$，即 $(-\lambda,1,\mu-1)\cdot(1,1,1)=-\lambda+1+\mu-1=0$，

故 $\lambda=\mu$，故 $\overrightarrow{B_1P}=(-\lambda,1,\lambda-1)$，其中 $\overrightarrow{CD_1}=(0,1,1)-(1,1,0)=(-1,0,1)$，

令 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{B_1P},\overrightarrow{CD_1}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{CD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{B_1P}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD_1}\right|}=\frac{\left|(-\lambda,1,\lambda-1)\cdot(-1,0,1)\right|}{\sqrt{\lambda^2+1+(\lambda-1)^2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

解得：$\lambda=0$或1，故B_1P与CD_1可能是$\frac{\pi}{3}$，A正确；

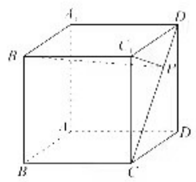
B选项，因为$\lambda=\mu$，故P点在棱CD_1上，如图，将平面CDD_1与平面A_1BCD_1沿着CD_1展成平面图形，线段A_1D即为$|DP|+|A_1P|$的最小值，利用余弦定理可得：



$A_1D^2=A_1D_1^2+D_1D^2-2A_1D_1\cdot D_1D\cos\frac{3}{4}\pi=1+1-2\times1\times1\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+\sqrt{2}$，

所以$A_1D=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，B错误；

C选项，因为$B_1C_1\perp$平面CC_1D_1D，连接C_1P，则$\angle B_1PC_1$即为B_1P与平面CC_1D_1D所成角，



若B_1P与平面CC_1D_1D所成角为$\frac{\pi}{4}$，则$\tan\angle B_1PC_1=\frac{B_1C_1}{C_1P}=1$，

所以$C_1P=B_1C_1=1$，即点P的轨迹是以C_1为圆心，以1为半径的$\frac{1}{4}$个圆，

于是点P的轨迹长度为$\frac{1}{4}\times2\pi\times1=\frac{\pi}{2}$，C正确；

D选项，当$\lambda=1$时，P点在DD_1上，过点A_1作$A_1H\,//\,CP$交BB_1于点H，连接CH，

则$CH\,//\,A_1P$，所以平行四边形CHA_1P即为正方体过点A_1、P、C的截面，

设$P(0,1,t)$，所以$\overrightarrow{PC}=(1,0,-t)$，$\overrightarrow{A_1C}=(1,1,-1)$，则$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{A_1C}=1+t$，$|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{1+t^2}$，$|\overrightarrow{A_1C}|=\sqrt{3}$，

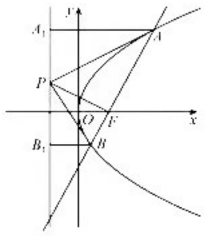
所以点P到直线A_1C的距离为

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{PC}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\overrightarrow{A_1C}|}\right)^2}=\sqrt{1+t^2-\left(\frac{1+t}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2t^2-2t+2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}，$$

于是当$t=\frac{1}{2}$时，$d_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\triangle PA_1C$的面积取得最小值，此时截面面积最小为$|A_1C|\cdot d_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

当$t=0$或1时，$d_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\triangle PA_1C$的面积取得最大值，此时截面面积最大为$|A_1C|\cdot d_{\max}=\sqrt{2}$，

故截面面积的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$，D错误.故选：AC



15.如图，连PF，PB，

由抛物线的定义可知，$|AF|=|AA_1|$，

又$\angle PAA_1=\angle PAF$，$|AP|=|AP|$，

所以$\triangle PAA_1\cong\triangle PAF$，所以$|PA_1|=|PF|$，$\angle PFA=\angle PA_1A=\frac{\pi}{2}$，即$PF\perp AB$，

所以$|PF|$就是点P到直线l的距离，因为$|BF|=|BB_1|$，$|PB|=|PB|$，$\angle PFB=\angle BB_1P=\frac{\pi}{2}$，

所以$\triangle PFB \cong \triangle PB_1B$，所以$|PB_1|=|PF|$，

所以$|PA_1|=|PF|=|PB_1|$，又$|A_1B_1|=10$，所以$|PA_1|=|PF|=|PB_1|=5$.故点P到直线l的距离为5.

16. 因为$S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+2$（$n\in N^*$，且$n\geq 2$），所以$b_{n+1}-b_n=2(n\geq 2)$，

$b_n=b_2+(n-2)\times 2=2n-1(n\geq 2)$，由表可知：前$n$行的数的个数为：$\frac{1(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$，又

$2^7-1<130<2^8-1$，所以a_{130}位于第8行第3列，因此$a_{130}=a_{128}+2d=b_8+2d=15+2d=19$．故

$d=2$．第6行共有32个元素，则第6行所有项的和为$11\times 32+\frac{32\times 31}{2}\times 2=1344$．故填1344.

三、解答题

17 解：(1)由$\sqrt{3}\tan A\tan C=\tan A+\tan C+\sqrt{3}$，

得$\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=-\sqrt{3}$.（2分）

即$\tan(A+C)=-\sqrt{3}$

又$A+C\in(0,\pi)$，$A+C=\frac{2\pi}{3}$

由题意得$B=\frac{\pi}{3}$(5分)

(2)由$A+B+C=\pi$，得$C=\frac{2\pi}{3}-A$.

由$\triangle ABC$是锐角三角形，得$A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.（7分）

由$\cos C=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$，得

$\cos A+\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A=\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

故$\cos A+\cos C$的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$（10分）

18.解：(1)这500名患者中“长潜伏者”的频率为$(0.18+0.03+0.03+0.01)\times 2=0.5$，所以“长潜伏者”的人数为$500\times 0.5=250$人.（2分）

由频率分布直方图可知，潜伏期不高于6天的患者所占比例为1-0.5=0.5，

潜伏期不高于8天的患者所占比例为$0.5+0.18\times 2=0.86$，

因此，80%分位数一定位于[6,8)内.（3分）

由$6+2\times\frac{0.8-0.5}{0.86-0.5}\approx 7.7$

所以可以估计样本的80%分位数约为7.7　（6分）

(2).X所有可能的取值为1 000,1 500,2 000，　（7分）

$P(X=1\ 000)=\frac{A_2^2}{A_5^2}=\frac{1}{10}$,

$P(X=1\ 500)=\frac{C_2^1C_3^1A_2^2+A_3^2}{A_5^2}=\frac{3}{10}$,

5

$P(X=2\,000)=\frac{C^{1}A^{1}A^{2}C}{A^{4}}=\frac{3}{5}$，（9 分）

所以 X 的分布列为

X	1 000	1 500	2 000
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

（10 分）

数学期望 $E(X)=1\,000\times\frac{1}{10}+1\,500\times\frac{3}{10}+2\,000\times\frac{3}{5}=1\,750$．（12 分）

19. (1)证明：由已知得 $AD/\!/BE$，$CG/\!/BE$，所以 $AD/\!/CG$，

故 AD，CG 确定一个平面，从而 A，C，G，D 四点共面．（2 分）

由已知得 $AB\perp BE$，$AB\perp BC$，$BE\cap BC=B$，故 $AB\perp$ 平面 $BCGE$．

又因为 $AB\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$．（5 分）

(2) 由已知，菱形 $BCGE$ 的边长为 2，$\angle EBC=60^\circ$，可求得 $BH=1$，$EH=\sqrt{3}$

作 $EH\perp BC$，垂足为 H．因为 $EH\subset$ 平面 $BCGE$，平面 $BCGE\perp$ 平面 ABC，

所以 $EH\perp$ 平面 ABC．（7 分）

以 H 为坐标原点，$\overrightarrow{HC}$ 的方向为 x 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $H\text{-}xyz$，

则 $A(-1,1,0)$，$C(1,0,0)$，$E(0,0,\sqrt{3})$，$G(2,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CG}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(2,-1,0)$．

设平面 $ACGD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\ 2x-y=0.\end{cases}$$

所以可取 $\boldsymbol{n}=(3,6,-\sqrt{3})$．（9 分）

又 $\overrightarrow{CE}=(-1,0,\sqrt{3})$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CE}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CE}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

因此 CE 与平面 ACG 的夹角正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$（12 分）

20. （1）由 $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$ 有 $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2=(a_n-1)^2+1$

$\therefore a_{n+1}-1=(a_n-1)^2$ （1 分）

两边取对数，得 $\ln(a_{n+1}-1)=\ln(a_n-1)^2$，（2 分）

即 $\ln(a_{n+1}-1)=2\ln(a_n-1)$

所以数列 $\{\ln(a_n-1)\}$ 是等比数列，首项为 $\ln 2$，公比为 2 （3 分）

所以 $\ln(a_n-1)=2^{n-1}\cdot\ln 2=\ln 2^{2^{n-1}}$ （5 分）

$\therefore a_n=2^{2^{n-1}}+1$ （6 分）

（2）证明：由 $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$ 有 $a_{n+1}-2=a_n(a_n-2)$ 得

$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{a_n(a_n-2)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n-2}\right)\Rightarrow\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-2}-\frac{2}{a_{n+1}-2}$$

所以 $b_n=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n-2}=\frac{2}{a_n-2}-\frac{2}{a_{n+1}-2}$ （9 分）

6

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\frac{2}{a_1-2}-\frac{2}{a_2-2}\right)+\left(\frac{2}{a_2-2}-\frac{2}{a_3-2}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{a_n-2}-\frac{2}{a_{n+1}-2}\right)$

$=\left(\frac{2}{a_1-2}-\frac{2}{a_{n+1}-2}\right)<2-\frac{2}{2^{2^n}-1}<2$（12 分）

21 解：(1)上顶点$(0,\ b)$到直线 $\sqrt{3}x+y+3=0$ 的距离为 2. $\therefore\frac{b+3}{2}=2$，得 $b=1$.（1 分）

又$\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4}=1$，解得 $a^2=4$.（2 分）

∴椭圆 O 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.（3 分）

因为点 A 在椭圆上，$\therefore\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$.

设经过点 A 的直线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，（4 分）

可得 $M(x_0-\frac{y_0}{k},0)$，$N(0,\ y_0-kx_0)$.

$\because\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{MA}$，$\therefore -x_0=\frac{2y_0}{k}$，即 $k=-\frac{2y_0}{x_0}$（5 分）

$\therefore|MN|=\sqrt{(x_0-\frac{y_0}{k})^2+(y_0-kx_0)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}x_0^2+9y_0^2}=3$.（6 分）

由(1)得直线 MN 斜率为 $k=-\frac{2y_0}{x_0}$，

$\because\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{NM}$，$\therefore BD$ 方程为 $y=-\frac{2y_0}{x_0}x$，即 $2y_0x+x_0y=0$，$x_0^2+4y_0^2=4$，（7 分）

联立$\begin{cases}y=-\frac{2y_0}{x_0}x,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 解得 $x^2=\frac{4x_0^2}{x_0^2+16y_0^2}$，$\therefore|x|=\frac{2|x_0|}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}$，

$\therefore|BD|=2\sqrt{1+\frac{4y_0^2}{x_0^2}}\cdot\frac{2|x_0|}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}=\frac{8}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}$，（8 分）

点 A 到直线 BD 的距离为 $d=\frac{|2y_0x_0+x_0y_0|}{\sqrt{4y_0^2+x_0^2}}=\frac{3|x_0y_0|}{2}$，（9 分）

$S_{\square ABCD}=|BD|\cdot d=\frac{12|x_0y_0|}{\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}=\frac{12}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{x_0^2}}}$，（10 分）

$\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{x_0^2}=(\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{x_0^2})(\frac{x_0^2}{4}+y_0^2)=5+\frac{x_0^2}{4y_0^2}+\frac{16y_0^2}{x_0^2}\geq9$，

当且仅当$\frac{x_0^2}{4y_0^2}=2$，即 $x_0^2=\frac{8}{3}$时，等号成立，（11 分）

$\sqrt{\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{x_0^2}}\geq3$，$0<\frac{12}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{x_0^2}}}\leq4$，$\therefore S_{\square ABCD}\leq4$，

四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 4.（12 分）

22 解：（1）$f(x)=e^x-a\frac{\ln x}{x}-a=\frac{xe^x-a\ln x-ax}{x}$ 有两个零点，等价于

$h(x)=xe^x-a(\ln x+x)=xe^x-a\ln\left(xe^x\right)(x>0)$ 有两个零点，令 $t=xe^x$，则 $t'=(x+1)e^x>0$

在 $x>0$ 时恒成立，所以 $t=xe^{x}$ 在 $x>0$ 时单调递增，

所以 $h(x)=xe^{x}-a\ln\left(xe^{x}\right)$ 有两个零点，等价于 $g(t)=t-a\ln t$ 有两个零点（2 分）

因为 $g'(t)=1-\dfrac{a}{t}=\dfrac{t-a}{t}$ 所以

①当 $a\le 0$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增，不可能有两个零点；

②当 $a>0$ 时，令 $g'(t)>0$，得 $t>a$，$g(t)$ 单调递增；令 $g'(t)<0$，得 $0<t<a$，$g(t)$ 单调递减.

所以 $g(t)_{\min}=g(a)=a-a\ln a$.（3 分）

若 $g(a)>0$，得 $0<a<e$，此时 $g(t)>0$ 恒成立，没有零点；

若 $g(a)=0$，得 $a=\mathrm{e}$，此时 $g(t)$ 有一个零点；

若 $g(a)<0$，得 $a>\mathrm{e}$，因为 $g(1)=1>0$，且 $a>\mathrm{e}$，$g\left(\mathrm{e}^{a}\right)=\mathrm{e}^{a}-a^{2}>0$，

所以 $g(t)$ 在 $(1,e)$，$\left(\mathrm{e},\mathrm{e}^{a}\right)$ 上各存在一个零点，合题意.（注：$a>\mathrm{e}$ 时无找点说明扣 1 分）

综上，a 的取值范围为 $(\mathrm{e},+\infty)$.（6 分）

（2）要证 $x_1x_2>e^{2-x_1-x_2}$，只需证 $\left(x_1\mathrm{e}^{x_1}\right)\cdot\left(x_2\mathrm{e}^{x_2}\right)>\mathrm{e}^{2}$，即证 $\ln\left(x_1\mathrm{e}^{x_1}\right)+\ln\left(x_2\mathrm{e}^{x_2}\right)>2$，

由（1）知 $t_1=x_1\mathrm{e}^{x_1}$，$t_2=x_2\mathrm{e}^{x_2}$，所以只需证 $\ln t_1+\ln t_2>2$.

因为 $a\ln t_1=t_1$，$a\ln t_2=t_2$，所以 $a\left(\ln t_2-\ln t_1\right)=t_2-t_1$，$a\left(\ln t_2+\ln t_1\right)=t_2+t_1$，

所以 $\ln t_2+\ln t_1=\dfrac{t_2+t_1}{t_2-t_1}\left(\ln t_2-\ln t_1\right)=\dfrac{\left(\dfrac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}$，只需证 $\dfrac{\left(\dfrac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}>2$.

设 $0<t_1<t_2$，令 $t=\dfrac{t_2}{t_1}$，则 $t>1$，所以只需证 $\ln t>2\dfrac{t-1}{t+1}$，即证 $\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2>0$.

令 $h(t)=\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2$，$t>1$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^{2}}=\dfrac{(t-1)^{2}}{t(t+1)^{2}}>0$，$h(t)>h(1)=0$，

即当 $t>1$ 时，$\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2>0$ 成立.

所以 $\ln t_1+\ln t_2>2$，即 $\left(x_1\mathrm{e}^{x_1}\right)\cdot\left(x_2\mathrm{e}^{x_2}\right)>\mathrm{e}^{2}$，即 $x_1x_2>e^{2-x_1-x_2}$.（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。