高三数学考试参考答案(理科)

1. B 【解析】本题考查集合的运算，考查数学运算的核心素养.
$A=(-1,1)$，$B=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$，则 $A\cap B=(-1,0]$.

2. C 【解析】本题考查复数的运算，考查数学运算的核心素养.
由 $x^2-4x+5=0$，可得 $(x-2)^2=i^2$，则 $x=2\pm i$，即 $z=2\pm i$，则 $|z|=\sqrt{5}$.

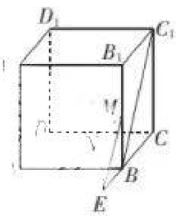
3. D 【解析】本题考查三角函数，考查直观想象的核心素养.
$f(x)=\sin\frac{x}{4}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{4}-1=2\sin(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3})-1$，则 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$，最小值为 -3.

4. D 【解析】本题考查正态分布，考查逻辑推理的核心素养.
测试成绩大于 110 分的概率等于 0.5，故选 D.

5. B 【解析】本题考查线性规划，考查数形结合的数学思想.
画出可行域(图略)知，当 $l:z=2x+y-1$ 平移到过点 $(2,3)$ 时，z 取得最大值，且最大值为 6.

6. B 【解析】本题考查极值，考查数学运算的核心素养.
$f'(x)=x(3ax+2b)$，由题可知 $f'(1)=3a+2b=0$，$f(1)=a+b=-1$，解得 $a=2$，$b=-3$，即 $f'(x)=x(6x-6)=6x(x-1)$，则 $f'(-1)=12$.

7. A 【解析】本题考查异面直线所成的角，考查空间想象能力.

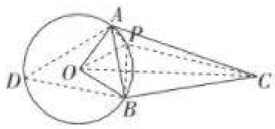


延长 CB 到点 E，使得 $EB=\frac{1}{2}BC$，连接 ME，NE，易知 $ME\parallel BC_1$，所以 $\angle NME$ 或其补角为异面直线 MN 和 BC_1 所成的角. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $ME=\sqrt{2}$，$NE=\sqrt{10}$，$MN=\sqrt{6}$，所以 $|\cos\angle NME|=|\frac{2+6-10}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}|=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

8. D 【解析】本题考查比较大小，考查逻辑推理的核心素养.
由题意知，$a=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{1}{2}$，$b=\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$c=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$，故 $c<a<b$.

9. A 【解析】本题考查计数原理及概率，考查逻辑推理的核心素养.
由题意知，4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，且周六、周日都有同学参加公益活动共有 $2^4-2=14$ 种不同的结果. 周六恰有 2 位同学参加公益活动共有 $C_4^2=6$ 种不同的结果，故所求的概率为 $\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$.

10. B 【解析】本题考查解三角形的实际应用，考查逻辑推理的核心素养.



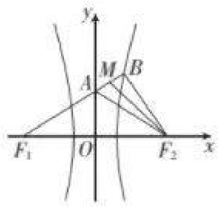
如图,因为$\angle APB=\frac{2\pi}{3}$,所以 P 在如图所示的圆 O 上,

圆 O 的半径为$\frac{1}{2}\times\frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=10$,

由圆周角的性质可得$\angle ADB=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$,$\angle AOB=\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{2\pi}{3}$,$\angle OBA=\angle OAB=\frac{\pi}{6}$,

连接 OC,可得 $OP+CP>OC$,所以当 P 为 OC 与圆的交点时,CP 取最小值,即 $CP=OC-OP$,又 $OB=OP=10$,在$\triangle OBC$ 中,$OB=10$,$BC=40$,$\angle OBC=\frac{2\pi}{3}$,根据余弦定理可知 $OC=\sqrt{10^2+40^2-2\times10\times40\times(-\frac{1}{2})}=10\sqrt{21}$,所以 CP 的最小值为$(10\sqrt{21}-10)$m.

11. A 【解析】本题考查双曲线,考查直观想象的核心素养.



如图,由题可知$|AF_1|=|AF_2|=|BF_2|$,又因为$|BF_1|-|BF_2|=2a$,所以$|AB|=2a$,因为直线 l 的斜率为$\frac{1}{2}$,所以$|AO|=\frac{c}{2}$,$|AF_1|=\frac{\sqrt{5}c}{2}$,设 M 为 AB 的中点,连接 MF_2,易知$\triangle AOF_1\backsim\triangle F_2MF_1$,所以$\frac{|F_1F_2|}{|AF_1|}=\frac{|F_1M|}{|F_1O|}$,

则$\frac{2c}{\frac{\sqrt{5}c}{2}}=\frac{a+\frac{\sqrt{5}c}{2}}{c}$,解得 $a=\frac{3\sqrt{5}}{10}c$,所以双曲线 C 的离心率为$\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

12. C 【解析】本题考查函数,考查逻辑推理和数学抽象的核心素养.

由 $g(x)=2f(x+1)-2$,可得 $g(x-1)=2f(x)-2$,又因为 $2f(x)+g(x-3)=2$,所以 $g(x-1)+g(x-3)=0$,可得 $g(x+2)=-g(x)$,$g(x+4)=g(x)$,所以 4 为 $g(x)$的周期,因为 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,$f(1)=3$,$g(x)=2f(x+1)-2$,可知 $g(x)$的图象关于直线 $x=0$ 对称,$g(0)=4$,则 $g(x+4)=g(-x)$,$g(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称,所以 $g(1)=g(3)$,又因为 $g(x+2)=-g(x)$,即$-g(1)=g(3)$,所以 $g(3)=0$,故正确结论的编号为①②④.

13. 4 【解析】本题考查平面向量,考查数学运算的核心素养.

由$(\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,可得$(\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2+m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $8-2m=0$,解得 $m=4$.

14. $\sqrt{2}$ 【解析】本题考查抛物线,考查直观想象的核心素养.

设 $A(x_0,y_0)$,由$|AF|=3|OF|$,可得 $x_0+1=3$,所以 $x_0=2$,则 $y_0^2=8$,即$|y_0|=2\sqrt{2}$,所以$\triangle OAF$ 的面积为$\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

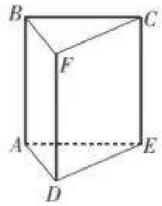
15. $\sqrt{3}-2$ 【解析】本题考查三角恒等变换,考查数学运算的核心素养.

因为 $f(x)=\tan(4x+\varphi)(-\frac{\pi}{2}<\varphi<0)$的图象关于点$(-\frac{\pi}{24},0)$对称,所以$-\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{k\pi}{2}$,$k\in$

$\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，即 $f(x)=\tan(4x-\frac{\pi}{3})$，则 $f(\frac{\pi}{16})$

$=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-2.$

16. 28π **【解析】本题考查外接球的应用，考查逻辑推理的核心素养.**



将四面体 $ABCD$ 补成如图所示的直三棱柱 $ADE-BFC$，因为向量 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle EAD=\frac{\pi}{3}$，则该四面体外接球的半径 $R=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，

所以该四面体外接球的表面积为 $4\pi\times(\sqrt{7})^2=28\pi$.

17. 解：(1)因为 $S_n=2^{n+1}+m$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=2^n+m$，所以 $a_n=2^n(n\geqslant 2)$. ……… 2 分

又 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_n=2^n$. …………………………………………………… 3 分

又因为 $a_1=S_1=2^2+m=2^1=2$，…………………………………………………… 5 分

所以 $m=-2$. 综上，$m=-2,a_n=2^n$. …………………………………………………… 6 分

(2) $b_n=a_nS_n=2^n(2^{n+1}-2)=2^{2n+1}-2^{n+1}$，……………………………………… 8 分

$T_n=(2^3+2^5+2^7+\cdots+2^{2n+1})-(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})$

$=\frac{8(1-4^n)}{1-4}-\frac{4(1-2^n)}{1-2}=\frac{2^{2n+3}}{3}-2^{n+2}+\frac{4}{3}$. ……………………………………… 12 分

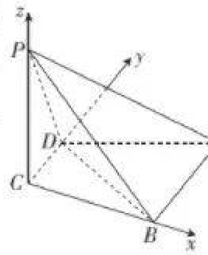
18. (1)证明：因为 $\angle BDC=60°$，$BD=2CD=2$，所以由余弦定理可得 $BC=\sqrt{3}$，…………… 1 分

所以 $BD^2=CD^2+BC^2$，则 $BC\perp CD$. …………………………………………………… 2 分

因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，且相交于 CD，所以 $BC\perp$ 平面 PCD. ……………………… 4 分

因为 $PD\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp PD$. ……………………………………………… 5 分

(2)解：如图，以 CB,CD,CP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(\sqrt{3},2,0),D(0,1,0),P(0,0,\sqrt{3})$，…………………… 6 分



易得平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，…………………… 8 分

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{DA}=(\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3})$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ -y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

取 $y=\sqrt{3}$，得 $x=-1,z=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3},1)$，…………………………………… 10 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以二面角 $A-PD-C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………………… 12 分

19. 解：(1)由题可知 X 的可能取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_4^2}\times(\frac{1}{3})^2+\frac{C_1^1C_3^1}{C_4^2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{18}+\frac{1}{8}=\frac{13}{72}$，……………………………… 2 分

$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_4^2}\times(\frac{2}{3})^2+\frac{C_1^1C_3^1}{C_4^2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{9}+\frac{1}{12}=\frac{11}{36}$， ………………………………… 3分

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=\frac{37}{72}$， …………………………………………………… 4分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{13}{72}$	$\frac{37}{72}$	$\frac{11}{36}$

…………………………………………………………………………………………………… 5分

$E(X)=0\times\frac{13}{72}+1\times\frac{37}{72}+2\times\frac{11}{36}=\frac{9}{8}$. ……………………………………………………… 7分

(2)设 Y 为甲选择 B 组答对题目的个数，$Y\sim B(2,0.6)$，………………………………… 9分

则 $E(Y)=2\times0.6=1.2>\frac{9}{8}$， …………………………………………………………… 11分

故甲应选 B 组答题. ………………………………………………………………………… 12分

20.(1)解：由 $|FM|=3|FN|$，可得 $a+c=3(a-c)$，解得 $a=2c$， ………………………………… 1分

又因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=\sqrt{3}c$， ………………………………………………………… 2分

因为点 $P(1,\frac{3}{2})$在椭圆 E 上，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1$，……………………………………… 3分

解得 $a=2,b=\sqrt{3},c=1$，所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………… 4分

(2)证明：当 l 与 x 轴重合时，$|AB|=|CD|=4$，所以$\frac{12}{|AB|}+\frac{|CD|^2}{4}=7$，………………… 5分

当 l 不与 x 轴重合时，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=my+1$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my+1,\end{cases}$整理得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$， ………………………………………………… 6分

故 $|AB|=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{(1+m^2)[(\frac{-6m}{3m^2+4})^2+\frac{36}{3m^2+4}]}=12\times\frac{m^2+1}{3m^2+4}$，……………………………………………………………………………… 8分

圆心 O 到直线 l 的距离为$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$，则$\frac{|CD|^2}{4}=4-\frac{1}{m^2+1}$， ………………………… 10分

所以$\frac{12}{|AB|}+\frac{|CD|^2}{4}=\frac{3m^2+4}{m^2+1}+4-\frac{1}{m^2+1}=7$，即$\frac{12}{|AB|}+\frac{|CD|^2}{4}$为定值. …………… 12分

21.解：(1)$f(1)=e$， …………………………………………………………………………… 1分

因为 $f(x)=\frac{e^x}{x}+\ln x$，所以 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x}$，则 $f'(1)=1$，………………………… 3分

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-e=x-1$，即 $y=x+e-1$. …………… 5分

(2)(正整数 a 可以为 1 和 2，下面写对一个即可得满分)

当 $a=1$ 时，$f(x)>3\ln x+\frac{1}{x}$ 恒成立，即 $e^x-2x\ln x-1>0$ 恒成立，……………………… 6分

证明过程如下.

令 $g(x)=e^x-2x\ln x-1$，

①当 $0<x\leqslant 1$ 时，$e^x>1$，$x\ln x\leqslant 0$，所以 $g(x)>0$. ………………………………………… 8分

②当 $x>1$ 时，$g'(x)=e^x-2\ln x-2$，令 $h(x)=e^x-2\ln x-2$，$x>1$，

则 $h'(x)=e^x-\frac{2}{x}$，可知 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………… 9分

当 $x=1$ 时，$h'(1)>0$，所以 $h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，……………… 10分

又因为 $h(1)=e-2>0$，所以 $g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，…………… 11分

所以 $g(x)>g(1)=e-1>0$ 成立. …………………………………………………… 12分

当 $a=2$ 时，$f(x)>5\ln x+\frac{1}{x}$ 恒成立，即 $e^x-4x\ln x-1>0$ 恒成立，……………………… 6分

证明过程如下.

令 $g(x)=e^x-4x\ln x-1$，

①当 $0<x\leqslant 1$ 时，$e^x>1$，$x\ln x\leqslant 0$，所以 $g(x)>0$. ………………………………………… 8分

②当 $x>1$ 时，$g'(x)=e^x-4\ln x-4$，令 $h(x)=e^x-4\ln x-4$，$x>1$，

则 $h'(x)=e^x-\frac{4}{x}$，可知 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h'(1)=e-4<0$，$h'(2)>0$，所以存在 $x_1\in(1,2)$，使得 $h'(x_1)=0$，则 $h(x)$ 在 $(1,x_1)$ 上单调递减，在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………… 9分

又因为 $h(1)<0$，$h(2)>0$，所以存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-4\ln x_0-4=0$，……………………………………………………………………………………… 10分

所以 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-4x_0\ln x_0-1=4\ln x_0+4-4x_0\ln x_0-1=4\ln x_0(1-x_0)+3$，

因为 $x_0\in(1,2)$，所以 $4\ln x_0(1-x_0)+3>-4\ln 2+3>0$，

即 $e^x-4x\ln x-1>0$ 恒成立. …………………………………………………… 12分

22. 解：(1)因为圆 M 以 $(3,0)$ 为圆心且与 l 相切，所以其半径为 $\frac{|3+0-5|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. ………… 1分

所以圆 M 的普通方程为 $(x-3)^2+y^2=2$，展开得 $x^2+y^2-6x+7=0$. …………………… 2分

由 $\begin{cases}x^2+y^2=\rho^2,\\x=\rho\cos\theta,\end{cases}$ 得圆 M 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+7=0$. …………………… 4分

(2)把 $\theta=\alpha$ 代入 $\rho^2-6\rho\cos\theta+7=0$，得 $\rho^2-6\rho\cos\alpha+7=0$，

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。