

# 2023届4月质量监测考试

## 理科数学

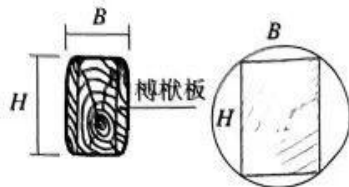
试卷满分:150分 考试时间:120分钟

### 注意事项:

- 1.答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内。
- 2.全部答案在答题卡上完成,答在本试卷上无效。
- 3.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
- 4.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集  $U = \{x \in \mathbb{N} | 0 < \log_2 x < 3\}$ , 集合  $A = \{2, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 6\}$ , 则  $C_U(A \cup B) =$  ( )  
 A.  $\{4, 5\}$                       B.  $\{3, 7\}$                       C.  $\{1, 3, 7\}$                       D.  $\{2, 4, 5, 6\}$
2. 已知  $i$  为虚数单位,  $(6 - 8i) \cdot z = 25 \cdot |-1 + \sqrt{3}| i$ , 则复数  $z$  的共轭复数为  
 A.  $12 - 16i$                       B.  $6 - 8i$                       C.  $3 + 4i$                       D.  $3 - 4i$
3. 已知  $x = \log_{10} 0.15$ ,  $5^y = 20$ ,  $z = 0.4^x$ , 则以下结论正确的是  
 A.  $x < y < z$                       B.  $z < y < x$                       C.  $y < x < z$                       D.  $z < y < x$
4. 在平行四边形  $ABCD$  中,  $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{ED}$ , 则  $\overrightarrow{CD} =$  ( )  
 A.  $\frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$                       B.  $\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$                       C.  $\frac{1}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$                       D.  $\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$
5. 已知  $\theta$  为锐角,  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1}{6}$ , 则  $\tan\theta =$  ( )  
 A.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. 某食品厂生产 A、B 两种半成品食物, 两种半成品都需要甲和乙两种蔬菜, 已知生产 1 吨产品 A 需蔬菜甲 3 吨, 乙 1 吨, 生产 1 吨产品 B 需蔬菜甲 2 吨, 乙 2 吨, 但是甲和乙蔬菜每天只能进货 12 吨和 8 吨. 若食品厂生产 1 吨 A 半成品食物可获利润为 3 万元, 生产 1 吨 B 半成品食物可获利润为 3 万元, 则食品厂仅凭 A、B 两种半成品食物每天可获利润不超过 9 万元的概率为 ( )  
 A.  $\frac{9}{20}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{11}{20}$                       D.  $\frac{9}{17}$
7. 如图, 古建筑的主要受力构件梁椽、楼板、柱子都是木头, 由于构件的拼接需要, 梁通常做成矩形. 圆形的木头加工成矩形断面, 梁是主要的水平受力构件, 作为水平或斜向受弯构件, 除了材料本身的特性, 截面抵抗矩  $W$  是唯一的标准. 矩形截面抵抗矩  $W = \frac{1}{6}BH^2$ , (其中  $B$  为垂直于弯矩作用方向的长度), 木材本身的圆形直径  $D$  是确定的, 则截面抵抗矩最大时  $H : B$  为 ( )  
 A.  $2 : 1$                       B.  $3 : 2$                       C.  $\sqrt{2} : 1$                       D.  $1 : 1$



8. 已知圆  $M$  过抛物线  $x^2 = -y + 4$  与坐标轴的三个交点, 则圆  $M$  上一点  $P$  到直线  $l: 3x - 4y - 9 = 0$  的最小距离为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B. 1                      C. 2                      D. 3

9. 2023 年春, 为了解开学后大学生的身体健康状况, 寒假开学后, 学校医疗部门抽取部分学生检查后, 发现大学生的舒张压呈正态分布  $X \sim N(70.8, 7.02^2)$  (单位: mm/Hg), 且  $P(X > 82.8) = 0.1$ , 若任意抽查该校大学生 6 人, 恰好有  $k$  人的舒张压落在  $(58.8, 82.8)$  内的概率最大, 则  $k =$  ( )

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

10. 定义在  $\mathbb{R}$  上函数  $f(x)$  满足  $f(x+1) + f(1-x) = 0$ ,  $f(-2x+1) = f(3+2x)$ , 当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = (x-1)^3$ , 则下列选项能使  $f(x) > \frac{1}{8}$  成立的为 ( )

- A.  $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$                       B.  $(\frac{21}{2}, \frac{25}{2})$                       C.  $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$                       D.  $(\frac{19}{2}, \frac{21}{2})$

11. 已知菱形  $ABCD$  沿对角线  $BD$  向上折起, 得到三棱锥  $A-BCD$ ,  $F$ 、 $E$  分别是棱  $BC$ 、 $AB$  的中点. 设三棱锥  $A-BCD$  的外接球为球  $O$ .  $AB = BD = 2$ , 则下列结论正确的个数为 ( )

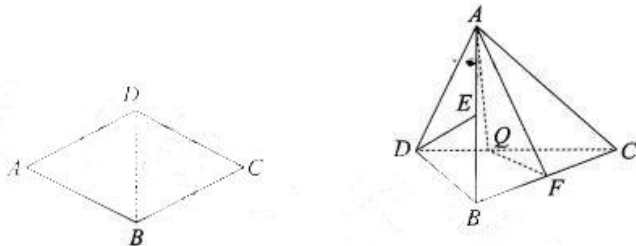


图 1

图 2

- ①  $BD \perp AC$ ; ②  $CD$  上存在点  $Q$ , 使得  $DE \parallel$  平面  $AFQ$ ;  
③ 当二面角  $A-BD-C$  为  $120^\circ$  时, 球  $O$  的表面积为  $\frac{28}{3}\pi$ .  
④ 三棱锥  $A-BCD$  的体积最大值为 1.

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

12. 已知数列  $\{a_n\}$  的首项为 1,  $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{n+2}{n} a_n + \cos n\pi, & n \text{ 为奇数} \\ a_n + \cos n\pi, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 数列  $\left\{ \frac{n+2}{a_{n+1} \cdot a_n \cdot 2^{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项

和小于实数  $M$ , 则  $M$  的最小值为来源: 高三答案公众号

- A.  $\frac{11}{24}$                       B.  $\frac{3}{8}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{2}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数  $f(x) = 2 \ln \frac{1}{x} - \frac{2}{x}$  在  $(2, f(2))$  处的切线方程为 \_\_\_\_\_.

14. 已知  $(x - my)^n$  的展开式中二项式系数之和为 64,  $x^3 y^3$  的系数为 -160, 则实数  $m =$  \_\_\_\_\_.

15. 把函数  $f(x) = \cos(2x + \varphi)$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) 的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位后, 图象关于  $y$  轴对称, 若  $f(x)$  在区间  $[-a, a]$  上单调递减, 则  $a$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

16. 下图是单叶双曲面的立体结构图，且为中心对称图形，此双曲面可由一根长度为4的线段  $AB$  绕与其不共面的直线  $l$  旋转而成，其轴截面为双曲线的一部分，若这两条异面直线所成的角为  $30^\circ$ ，垂直于旋转轴的截面圆的面积最小值为  $\pi$ ，则双曲线的离心率为\_\_\_\_\_.



三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共60分。

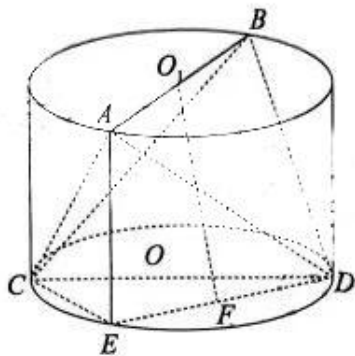
17. (本小题满分12分) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ， $\sin A \sin B = \sin^2 A - 2 \sin^2 B$ ， $c = 3$ ， $c > a$ ， $\triangle ABC$  外接圆面积为  $3\pi$ 。

(1) 求  $b$ ；来源：高三答案公众号

(2) 若  $CD$  为角  $C$  的角平分线，交  $AB$  于  $D$  点，求  $CD$  的长。

做

18. (本小题满分12分) 已知  $AB, CD$  分别是圆柱上、下底面圆的直径，且异面直线  $AB$  与  $CD$  所成的角为  $60^\circ$ ， $O_1, O$  分别为上、下底面的圆心，连接  $AC, AD, BC, BD$ ，过  $A$  作圆柱的母线  $AE$ ， $CE > DE$ ，点  $F$  是  $DE$  的中点。



(1) 证明： $O_1F \parallel$  平面  $ACE$ ；

(2) 若二面角  $A-BC-D$  的余弦值为  $\frac{5}{7}$ ，求圆柱的高与底面圆的直径的比值。

19. (本小题满分12分) 在中国有一个习俗就是长辈给晚辈红包, 就是希望晚辈能长命百岁, 年年有今朝, 岁岁有今日, 也是非常好的一种祝福, 一种祝愿, 更是象征了一种喜庆, 更能增加气氛的一个环节. 有时小朋友的红包会被父母保存, 防止红包钱乱花.

(1) 小明的老师随机调查了本校同学的红包保存情况, 经统计其红包保存情况与年龄大小情况如下表:

	未交给父母保存红包	交给父母保存红包	总计
年龄小于12岁	10	50	60
年龄不小于12岁	15	25	40
总计	25	75	100

(1) 根据表中数据, 是否有97.5%的把握可以认为同学的红包保存情况与年龄大小有关?;

(2) 2023年春节, 小明的爷爷准备了4个大小完全相同的红包让小明抽取, 其中只有两个红包里面有现金, 且分别为100和200元, 其余两个里面都是纸币大小的蓝色纸片.

(i) 若小明逐个抽取红包, 求恰好2次就能全部判断红包情况的概率.

(ii) 若小明选择一个红包的概率为 $\frac{1}{6}$ , 选择两个红包的概率为 $\frac{1}{3}$ , 选择三个红包的概率为 $\frac{1}{2}$ , 全部拿走的概率为0. 已知小明完全不知道四个红包里面的东西, 只好根据自己的经验随机选择. 记 $X$ 表示小明选完红包后所得的钱数. 求 $X$ 的分布列及数学期望.

附:  $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$  来源: 高三答案公众号,  $n = a + b + c + d$ .

$\alpha = P(\chi^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
$k$	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20. (本小题满分12分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的焦点分别  $F_1, F_2$ ,  $A, B$  分别为  $C$  的上、下顶点, 过  $F_1$  且垂直于  $AF_2$  的直线与  $C$  交于  $D, E$  两点,  $|DE| = \frac{48}{13}$ ,  $\angle AF_2B = 120^\circ$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 过直线  $x + y - 4 = 0$  上任一点  $M$ , 作椭圆  $C$  的两条切线, 切点为  $P, Q$  两点, 证明: 直线  $PQ$  过定点.

21. (本小题满分12分) 已知函数  $f(x) = \ln(x+1) - axe^x$ ,  $0 \leq a < 1$

(1) 判断函数  $f(x)$  的零点个数;

(2) 证明: 当  $n \in N, n \geq 1$  时, 证明:  $\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n < \frac{e^n - e}{e - 1}$



(二) 选考题, 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分10分) 选修4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中, 以原点为极点,  $x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta = 4$ , 若点 $M\left(\rho_1, \frac{\pi}{3}\right)$ 在直线 $l: \rho \cos \theta = 2$ 上, 点 $N\left(\rho_2, \frac{\pi}{6}\right)$ 在圆 $E: \rho = 4\sqrt{3} \sin \theta$ 上 (其中 $\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ).

(1) 求曲线 $C$ 的直角坐标方程和 $M$ 、 $N$ 的直角坐标;

(2) 已知 $MN$ 所在直线 $l$ 与曲线 $C$ 交于 $A$ 、 $B$ 两点, 与 $y$ 轴交于点 $P$ , 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. (本小题满分10分) 选修4-5: 不等式选讲

设满足不等式 $|x-1| + |x+2| + (x-1) \leq 0$ 成立实数 $x$ 的最大值为 $M$ .

(1) 求 $M$ 的值;

(2) 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 且 $a+b+c=M$ , 证明:  $(a-2)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2 \geq \frac{1}{3}$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主选拔在线官方微信号: [zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线