江西师大附中2021届高三三模考试卷

理科数学

一.选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.定义：若复数z与z'满足$zz'=1$，则称这两个复数互为倒数。已知复数$z=-2i(4-i)$，则该复数的倒数为（　　）

A. $-\frac{1}{34}+\frac{2}{17}i$　　B. $-\frac{1}{34}-\frac{2}{17}i$　　C. $\frac{1}{34}+\frac{2}{17}i$　　D. $\frac{1}{34}-\frac{2}{17}i$

2.已知集合$A=\{x|y=\log_2(x+1)\}$，$B=\left\{x\left|\frac{2+x}{x-3}\le 0\right.\right\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $(-1,3)$　　C. $(2,3)$　　D. $\{0,2,3\}$

3.在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上随机地取一个数$x$，则事件“$\cos x\ge\frac{1}{2}$”发生的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

4.设$f(x)=\begin{cases}-x+1, x\le 0\\ -x^2-1, x>0\end{cases}$，$a=0.7^{-0.5}$，$b=\log_{0.5}0.7$，$c=\log_{0.7}5$，则（　　）

A. $f(a)>f(b)>f(c)$　　B. $f(b)>f(a)>f(c)$

C. $f(c)>f(a)>f(b)$　　D. $f(c)>f(b)>f(a)$

5.已知等比数列$\{a_n\}$满足$\log_2 a_3+\log_2 a_{10}=1$，且$a_3a_6a_8a_{11}=16$，则该数列的公比为（　　）

A. 4　　B. 2　　C. ± 2　　D. ± 4

6.设α和β是两个不重合的平面，能使这两个平面平行的是（　　）

A. α内有无数条直线与β平行　　B. α内有两条相交直线与β平行

C. α内有无数个点到β的距离相等　　D. α和β垂直于同一个平面

7.中心为O的双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线方程为$y=2x$，过右焦点$F$作$x$轴的垂线，与双曲线在第一象限的交点为$A$，若$\Delta OAF$的面积是$2\sqrt{5}$，则该双曲

线的实轴长是（　　）

A. 4　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 1　　D. 2

8.已知函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称，且满足 $f(x+1)+f(3-x)=0$，且当 $x\in(2,4)$ 时 $f(x)=-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+m$，若 $\frac{f(2021)-1}{2}=f(-1)$，则 m 等于（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{3}{4}$

9. 被誉为"中国现代数学之父"的著名数学家华罗庚先生倡导的"0.618 优选法"在生产和科研实践中得到了非常广泛的应有，0.618 就是黄金分割比 $m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的近似值，黄金分割比还可以表示成 $2\sin18°$，则 $\frac{m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27°-1}=$（　　）

A. 4　　B. $\sqrt{5}+1$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}-1$

10.已知 F_1 和 F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，若点 F_2 关于双曲线渐近线的对称点 A 满足 $\angle F_1AO=\angle AOF_1$（$O$ 是坐标原点），则双曲线的渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm2x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$　　C. $y=\pm\sqrt{2}x$　　D. $y=\pm x$

11.长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$BB_1=\sqrt{2}$，设点 A 关于直线 BD_1 的对称点为 P，则 P 与 C_1 两点之间的距离为（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 T_n，$a_3=4$，$T_6=27$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1}=b_1+b_2+\cdots+b_n$，$b_1=b_2=1$，设 $c_n=a_n+b_n$，则数列 $\{c_n\}$ 的前11项的和为（　　）

A. 1062　　B. 2124　　C. 1101　　D. 1100

二.填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.设平面向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-2,y)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $|\vec{a}+3\vec{b}|=$ ________

14.若二项式 $(\frac{\sqrt{5}}{5}x^2+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项为 m，则 $\int_1^m x^2dx=$ ________

15.已知圆C的方程为$(x-1)^2+y^2=1$，P是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上一点，过点$P$作圆$C$的两条切线，切点分别为$A$和$B$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值是________

16.若函数$f(x)=\begin{cases}-x+6,x\le 2\\3+\log_a x,x>2\end{cases}$（$a>0,a\ne 1$）的值域为$[4,+\infty)$，则实数$a$的取值范围为________

三.解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17题到21题为心考题,每个试题考生都必须作答;第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分

17.(12分)已知锐角ΔABC同时满足下列四个条件中的三个:①$A=\frac{\pi}{3}$;②$a=13$;③$c=15$;④$\sin C=\frac{1}{3}$

（1）请指出这三个条件，并说明理由;

（2）求该三角形的面积.

18.（12分）在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，$AD\parallel BC$，$\angle ADC=90^\circ$，平面$PAD\perp$底面$ABCD$，Q为AD的中点，M是棱PC上的点，$PA=PD=2$，$BC=\frac{1}{2}AD=1$，$CD=\sqrt{3}$.

（1）求证：平面$MQB\perp$平面PAD；

（2）若$BM\perp PC$，求直线AP与BM所成角的余弦值；

（3）若二面角$M-BQ-C$大小为60°，求QM的长.

19.（12分）为培养学生对传统文化的热爱，某校从理科班抽取60人，从文科班抽取50人参加传统文化知识竞赛.

（1）根据题目条件完成下面2×2列联表，并据此判断是否有99%的把握认为传统文化知识竞赛成绩与学生的文理分科有关.

	优秀人数	非优秀人数	总计
理科			
文科		30	
总计	60		

（2）现已知A，B，C三人获得优秀的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，设随机变量X表示A，B，C三人中获得优秀的人数，求X的分布列及期望$E(X)$.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

20.（12 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2，过焦点 F_2 且垂直于 x 轴的直线与椭圆 C 相交所得的弦长为1，椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）点 P 是椭圆 C 上位于 x 轴上方的动点，若直线 F_1P 和 F_2P 与直线 $y=3$ 分别交于 G 和 H 两点，设直线 F_1P 和 F_2P 的斜率分别为 k_1 和 k_2，若线段 GH 的长度小于 $10\sqrt{3}$，求 $k_1\cdot k_2$ 的最大值.

21.（12 分）若方程 $f(x)=x$ 有实数根 x_0，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个不动点.已知函数 $f(x)=e^{x-\ln x}+(a+1)-a\ln x$.

（1）若 $a=-e$，求证：$f(x)$ 有唯一不动点；

（2）若 $f(x)$ 有两个不动点，求实数 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一个题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（10 分）**选修 4-4：坐标系与参数方程**

已知椭圆 $C:\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 是参数），A 和 B 是 C 上的动点，且满足 $OA\perp OB$（O 是坐标原点）.以 O 为极点、以 x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，点 D 的极坐标为 $(-4,\dfrac{\pi}{3})$.

（1）求线段 AD 的中点 M 的轨迹 E 的普通方程；

（2）利用椭圆 C 的极坐标方程证明 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}$ 为定值，并求 ΔAOB 面积的最大值.

23.（10 分）**选修 4-5：不等式选讲**

设函数 $f(x)=|2x+1|-|x-4|$.

（1）解不等式 $f(x)>0$；

（2）若 $f(x)+3|x-4|>|m-2|$ 对一切实数 x 均成立，求 m 的取值范围

江西师大附中2021届高三三模考试卷

理科数学评分标准

一.选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	D	D	B	B	D	C	C	B	C	C

二.填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $5\sqrt{2}$　　14. $\dfrac{26}{3}$　　15. $2\sqrt{2}-3$　　16. $[1,2]$

三.解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17题到21题为心考题，每个试题考生都必须作答；第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分

17.【评分标准】

（1）该三角形同时满足①②③……（2分）

理由如下：

若ΔABC同时满足①④，则在锐角ΔABC中，$\sin C=\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$，所以$0<C<\dfrac{\pi}{6}$

又因为$A=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\dfrac{\pi}{3}<A+C<\dfrac{\pi}{2}$，所以$B>\dfrac{\pi}{2}$，这与$\Delta ABC$是锐角三角形矛盾，所以$\Delta ABC$不能同时满足①④，所以$\Delta ABC$同时满足②③……（4分）

因为$c>a$，所以$C>A$，若满足④，则$A<C<\dfrac{\pi}{6}$，则$B>\dfrac{\pi}{2}$，这与ΔABC是锐角三角形矛盾，所以ΔABC不能满足④.

故ΔABC满足①②③……（6分）

（2）因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，解得$b=7$或8……（8分）

当$b=7$时，$\cos C<0$不符，故$b=8$……（10分）

ΔABC的面积为$30\sqrt{3}$……（12分）

18.【评分标准】

（1）证到四边形$BCDQ$为平行四边形……（1分）

证到$PQ\perp$底面$ABCD$……（2分）

证到$BQ\perp$平面ADP……（3分）

证到结论……（4分）

（2）因为QA,QB,QP两两垂直，所以以Q为坐标原点，QA,QB,QP所在的直线分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系.

$A(1,0,0),P(0,0,\sqrt{3}),B(0,\sqrt{3},0),C(-1,\sqrt{3},0)$……（5分）

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}(0\le\lambda\le 1)$，所以 $M(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，解得 $\lambda=\frac{6}{7}$，……（6 分）

$\overrightarrow{BM}=(-\frac{6}{7},-\frac{\sqrt{3}}{7},\frac{\sqrt{3}}{7})$ ……（7 分）

直线 AP 与 BM 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{42}}{28}$ ……（8 分）

（3）平面 BQC 的一个法向量是 $\vec{n}=(0,0,1)$ ……（9 分）

设 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QP}+(1-\lambda)\overrightarrow{QC}(0\le\lambda\le 1)$

平面 MBQ 的一个法向量是 $\vec{m}=(\sqrt{3},0,\frac{1-\lambda}{\lambda})$ ……（10 分）

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$ ……（11 分）

所以 $|QM|=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ……（12 分）

19.【评分标准】（1）

	40	20	60
	20	30	50
	60	50	110

……（3 分）

由公式计算得 $k\approx 7.8>6.635$ ……（5 分）

所以有 99% 的把握认为学生的传统文化知识竞赛成绩与文理分科有关……（6 分）

（2）

X	0	1	2	3
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$

……（10 分）

$E(X)=\frac{7}{6}$ ……（12 分）

20.【评分标准】

（1）$\frac{2b^2}{a}=1$ ……（2 分）

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……

（2）设 $P(x_0,y_0)(0<y_0\le 1)$，过点 P 作直线 $MN\perp x$ 轴，分别交 x 轴和直线 $y=3$ 于 M,N 两点.

$\Delta GPH\sim\Delta F_1PF_2$，$\dfrac{|GH|}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3-y_0}{y_0}$，……（6 分）

即 $|GH|=2\sqrt{3}(\dfrac{3}{y_0}-1)<10\sqrt{3}$，……（7 分）

得 $\dfrac{1}{2}<y_0\le 1$……（8 分）

所以 $x_0\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，……（9 分）

$k_1k_2=\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{4}(-1+\dfrac{1}{x_0^2-3})$……（11 分）

所以当 $x_0=0$ 时 k_1k_2 取得最大值 $-\dfrac{1}{3}$……（12 分）

21.【评分标准】

（1）当 $a=-e$ 时，由 $f(x)=x$ 得 $\dfrac{e^x}{x}-ex+e\ln x=0$……（1 分）

令 $F(x)=\dfrac{e^x}{x}-ex+e\ln x$，求导可得 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单减，$(1,+\infty)$ 上单增……（3 分）

$F(x)_{\min}=F(1)=0$……（4 分）

所以 $\dfrac{e^x}{x}-ex+e\ln x=0$ 有唯一的实数根 $x_0=1$，即 $f(x)$ 有唯一不动点……（5 分）

（2）由 $f(x)=x$ 得 $e^{x-\ln x}+a(x-\ln x)=0$……（6 分）

证到 $x-\ln x\in[1,+\infty)$……（7 分）

令 $g(t)=e^t+at(t\ge 1)$，根据题意 $g(t)=e^t+at(t\ge 1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点.

①当 $a\ge 0$ 时，$g(t)\ge 0$ 恒成立，无零点，不符合题意；……（9 分）

②当 $a<0$ 时，令 $g'(t)=0$ 有 $t=\ln(-a)$，由 $g(\ln(-a))<0$ 得 $a<-e$，此时 $g(1)<0$，接下来只需在 $(1,+\infty)$ 上找一点 t_0，使得 $g(t_0)>0$ 即可……（11 分）

因为 $e^t>t^2(t>1)$，从而 $e^t+at>t^2+at$，令 $t^2+at>0$，即 $t+a>0$

$t_0>-a$，不妨取$t_0=-2a$，有$g(-2a)>0$，所以$g(t)$在$(1,t_0)$上存在唯一零点，即$f(x)=x$有两个不同实根，故$a<-e$ ……（12 分）

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一个题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（10 分）**选修 4-4：坐标系与参数方程**【评分标准】

（1）点D的直角坐标为$(-2,-2\sqrt{3})$，由题意可设A的坐标为$(2\cos\alpha,\sin\alpha)$，

则AD的中点M的坐标为$(-1+\cos\alpha,-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sin\alpha)$，

得E普通方程为$(x+1)^2+4\left(y+\sqrt{3}\right)^2=1$ ……（5 分）

（2）椭圆C的普通方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，化为极坐标方程是$\rho^2+3\rho^2\sin^2\theta=4$，变形得

$\rho=\frac{2}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$，设$A(\rho_1,\theta)$，$B(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{2})$，所以$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{5}{4}$（定值），……（8 分）

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2=\frac{2}{\sqrt{4+\frac{9}{4}\sin^2 2\theta}}$，当$\sin 2\theta=0$时，$S$取得最大值为$1$ ……（10 分）

23.（10 分）**选修 4-5：不等式选讲**【评分标准】

（1）$f(x)=\begin{cases}x+5,x\geq 4\\3x-3,-\frac{1}{2}\leq x<4\\-x-5,x<-\frac{1}{2}\end{cases}$，解得原不等式的解集为$\{x|x<-5或x>1\}$ ……（5 分）

（2）$f(x)+3|x-4|=|2x+1|+2|x-4|\geq|2x+1-(2x-8)|=9$，当$-\frac{1}{2}\leq x\leq 4$时等号成立，所以只需$|m-2|<9$，解得$m\in(-7,11)$ ……（10 分）

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 " 专业、专注、有态度 " 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。