2021年深圳市高三年级第一次调研考试

数 学

2021.3

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的签字笔在答题卡指定位置填写自己的学校、姓名和考生号，并将条形码正向准确粘贴在答题卡的贴条形码区，请保持条形码整洁、不污损.
2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上.
3. 非选择题必须用0.5毫米黑色字迹的签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答的答案无效.
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卡交回.

一、单项选择题：本题共8道小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid x>2\}$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

A. $\{3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z|=$

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

3. 小明跟父母、爷爷和奶奶一同参加《中国诗词大会》的现场录制，5人坐一排．若小明的父母都与他相邻，则不同坐法的种数为

A. 6　　B. 12　　C. 24　　D. 48

4. 设 α，β，γ 为三个不同的平面，若 $\alpha\perp\beta$，则“$\gamma/\!/\beta$”是“$\alpha\perp\gamma$”的

A．充分不必要条件　　B．充要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

5. 已知随机变量 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，有下列四个命题：

甲：$P(\xi<a-1)>P(\xi>a+2)$　　乙：$P(\xi>a)=0.5$

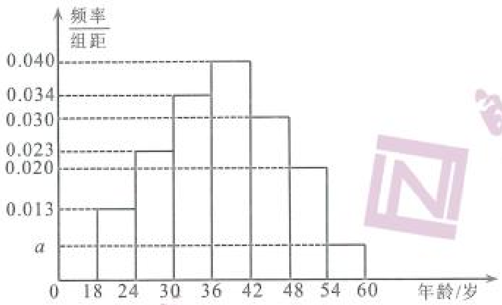
丙：$P(\xi\le a)=0.5$　　丁：$P(a<\xi<a+1)<P(a+1<\xi<a+2)$

如果只有一个假命题，则该命题为

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

6．2020年12月31日，国务院联防联控机制发布，国药集团中国生物的新冠病毒灭活疫苗已获药监局批准附条件上市，其保护效力达到世界卫生组织及药监局相关标准要求，现已对18至59岁的人提供．根据某地接种年龄样本的频率分布直方图(如下图)估计该地接种年龄的中位数为

A．40　　B．39　　C．38　　D．37

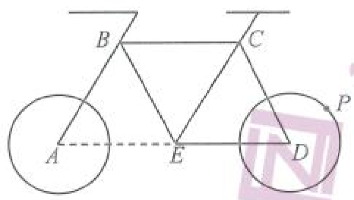


（第6题图）

7．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_{m+n}=a_m+a_n$ $(m,\ n\in \mathbf{N}^*)$，若$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k=135$，则$k=$

A．10　　B．9　　C．8　　D．7

8．骑自行车是一种能有效改善心肺功能的耐力性有氧运动，深受大众喜爱，下图是某一自行车的平面结构示意图，已知图中的圆A(前轮)，圆D(后轮)的半径均为$\sqrt{3}$，$\triangle ABE$，$\triangle BEC$，$\triangle ECD$均是边长为4的等边三角形．设点P为后轮上的一点，则在骑动该自行车的过程中，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}$的最大值为



（第8题图）

A．18　　B．24　　C．36　　D．48

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9．设F_1、F_2分别是双曲线$C:\dfrac{x^2}{m+n}-\dfrac{y^2}{m-n}=1$的左、右焦点，且$|F_1F_2|=4$，则下列结论正确的有

A．$m=2$　　B．当$n=0$时，C的离心率是2

C．F_1到渐近线的距离随着n的增大而减小　　D．当$n=1$时，C的实轴长是虚轴长的两倍

10．已知函数 $f(x)=\cos 2x-2\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)$，则

A．$f(x)$ 的最大值为3

B．$f(x)$ 的最小正周期为 π

C．$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称

D．$f(x)$ 在区间 $[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}]$ 上单调递减

11．已知函数 $f(x)=3^x+x^3$，若 $0<m<1<n$，则下列不等式一定成立的有

A．$f(1-m)<f(n-1)$

B．$f(2\sqrt{mn})<f(m+n)$

C．$f(\log_m n)<f(\log_n m)$

D．$f(m^n)<f(n^m)$

12．在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，棱长为1的正四面体 $ABCD$ 的顶点 A，B 分别为 y 轴和 z 轴上的动点（可与坐标原点 O 重合），记正四面体 $ABCD$ 在平面 xOy 上的正投影图形为 S，则下列说法正确的有

A．若 CD // 平面 xOy，则 S 可能为正方形

B．若点 A 与坐标原点 O 重合，则 S 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C．若 $OA=OB=OC$，则 S 的面积不可能为 $\frac{1}{2}$

D．点 D 到坐标原点 O 的距离不可能为 $\frac{3}{2}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知函数的图象关于 y 轴对称，且与直线 $y=x$ 相切，则满足上述条件的二次函数可以为 $f(x)=$__________.

14．设 F 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过 F 作倾斜角为60°的直线交 C 于 A，B 两点，若 $|AF|-|BF|=4$，则 $|AB|=$__________.

15．冈珀茨模型（$y=k\cdot a^{b^t}$）是由冈珀茨(Gompertz)提出，可作为动物种群数量变化的模型，并用于描述种群的消亡规律.已知某珍稀物种 t 年后的种群数量 y 近似满足冈珀茨模型：$y=k_0\cdot e^{1.4e^{-0.125t}}$（当 t=0时，表示2020年初的种群数量），若 m $(m\in N^*)$ 年后，该物种的种群数量将不足2020年初种群数量的一半，则 m 的最小值为__________.（$\ln 2\approx 0.7$）

16．拿破仑定理是法国著名军事家拿破仑·波拿巴最早提出的一个几何定理："以任意三角形的三条边为边，向外构造三个等边三角形，则这三个等边三角形的外接圆圆心恰为另一个等边三角形（此等边三角形称为拿破仑三角形）的顶点."已知△ABC 内接于单位圆，以 BC，AC，AB 为边向外作三个等边三角形，其外接圆圆心依次记为 A'，B'，C'.若 $\angle ACB=30°$，则△$A'B'C'$ 的面积最大值为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，满足 $S_{n+1}=\dfrac{S_n}{1+2S_n}$，且 $a_1=1$.

（1）证明：数列 $\{\dfrac{1}{S_n}\}$ 为等差数列；

（2）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. （12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 A 为锐角，$\sin B-\cos C=\dfrac{c^2-a^2}{2ab}$.

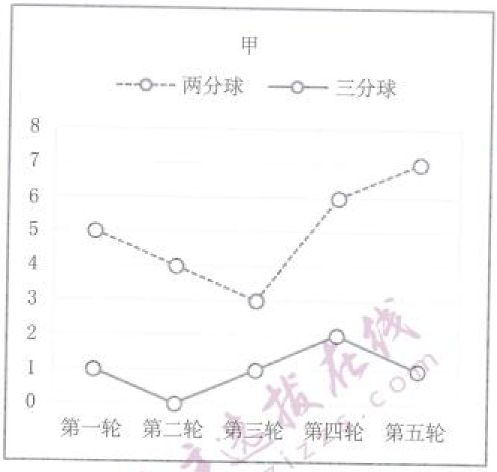
（1）求 A；

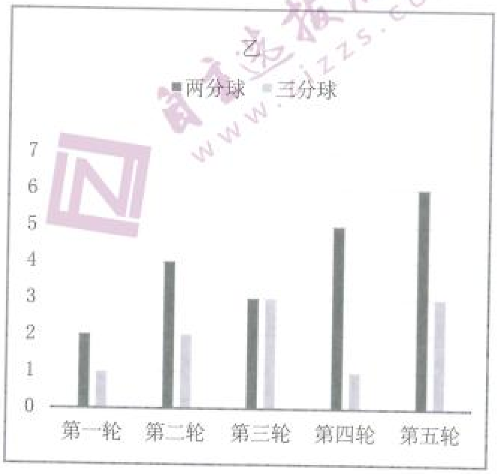
（2）若 $b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，且 BC 边上的高为 $2\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. （12 分）

某校将进行篮球定点投篮测试，规则为：每人至多投3次，先在 M 处投一次三分球，投进得3分，未投进不得分，以后均在 N 处投两分球，每投进一次得2分，未投进不得分．测试者累计得分高于3分即通过测试，并终止投篮．

甲、乙两位同学为了通过测试，进行了五轮投篮训练，每人每轮在 M 处和 N 处各投10次，根据他们每轮两分球和三分球的命中次数情况分别得到如下图表：





（第 19 题图）

若以每人五轮投篮训练命中频率的平均值作为其测试时每次投篮命中的概率．

（1）求甲同学通过测试的概率；

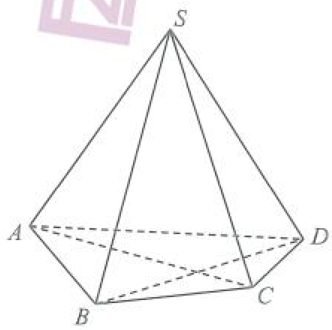
（2）在甲、乙两位同学均通过测试的条件下，求甲得分比乙得分高的概率．

20. （12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA=SB=SC=SD=13$，$AC\perp CD$，$AB=6$，$BD=8$．

（1）求证：平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $A-SB-D$ 的余弦值．



（第 20 题图）

21.（12 分）

设 O 是坐标原点，以 F_1，F_2 为焦点的椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{2}$，以 $|F_1F_2|$ 为直径的圆和 C 恰好有两个交点.

（1）求 C 的方程；

（2）P 是 C 外的一点，过 P 的直线 l_1，l_2 均与 C 相切，且 l_1，l_2 的斜率之积为 $m(-1\le m\le -\frac{1}{2})$，记 u 为 $|PO|$ 的最小值，求 u 的取值范围.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln^2 x+2x(1-\ln x)$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $g(x)=e^2 f(x)-2a^2$ 有且仅有 3 个零点，求 a 的取值范围.（其中常数 e=2.718 28…，是自然对数的底数）

绝密★启封并使用完毕前　　　　　　　　　　　　　　试题类型：A

2021年深圳市高三第一次调研考试
数学试题答案及评分参考

一、单项选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	A	D	C	B	C

二、多项选择题：

题号	9	10	11	12
答案	AC	BC	BD	ABD

12. 解析：（1）考查选项A：若$CD//$平面xOy，考虑以下特殊情形：

1.当点B与坐标原点O重合时，S为正方形；

2.当点A与坐标原点O重合时，S为三角形，故选项A正确；

（2）考查选项B：若点A与坐标原点O重合，即AB在z轴上，

易知$CD//$平面xOy，且S为三角形，

不难知道其面积为$\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故选项B正确；

（3）考查选项C：当$OA=OB=OC$，且点O在正四面体$ABCD$外部时，

则点D恰好为以OA，OB，OC为棱的正方体的一个顶点，

$\because AB=1$，$\therefore OA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore S$是边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的正方形，其面积为$\frac{1}{2}$，故选项C错误；

（不难知道当$OA=OB=OC$，且点O在正四面体$ABCD$内部时，S为三角形，且其面积为$\frac{5}{12}$）

（4）考查选项D：设AB的中点为M，则$OM=\frac{1}{2}$，且$MD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

易知$OD\le OM+MD=\frac{1+\sqrt{3}}{2}<\frac{3}{2}$，即$OD<\frac{3}{2}$，

$\therefore$点D到坐标原点O的距离小于$\frac{3}{2}$，故选项D正确；

综上所述，应选A、B、D.

三、填空题：

13. $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$（答案不唯一）；　14. 8；　15. 6；　16. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13. 解析：$f(x)=x^2+\frac{1}{4}$，或 $f(x)=\frac{x^2+1}{2}$，或 $f(x)=-\frac{x^2+1}{2}$ 等(只需 $f(x)=ax^2+c$ 满足 $ac=\frac{1}{4}$ 即可)

16. 解析：不妨设 $BC=a$，$AC=b$，

若 $\angle ACB=30°$，则由正弦定理可得 $\frac{AB}{\sin 30°}=2$，故 $AB=1$，

$\therefore$ 由余弦定理得 $1=a^2+b^2-2ab\cos 30°=a^2+b^2-\sqrt{3}ab \geq (1-\frac{\sqrt{3}}{2})(a^2+b^2)$，

$\therefore a^2+b^2 \leq 4+2\sqrt{3}$，

显然△$A'B'C'$ 为由△ABC 所得到的拿破仑三角形(等边三角形)，设其边长为 x，

易知 $\angle A'CB'=90°$，且 $A'C=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$B'C=\frac{\sqrt{3}}{3}b$，

$\therefore x^2=(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}b)^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2)$，

$\therefore$ △$A'B'C'$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2) \leq \frac{\sqrt{3}}{12}\times(4+2\sqrt{3})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$，

显然可取等号，即△$A'B'C'$ 的面积最大值为 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$，故应填 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$。

四、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

设数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n，满足 $S_{n+1}=\frac{S_n}{1+2S_n}$，且 $a_1=1$.

（1）证明：数列$\{\frac{1}{S_n}\}$为等差数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式.

解：（1）由 $S_{n+1}=\frac{S_n}{1+2S_n}$，得 $\frac{1}{S_{n+1}}=\frac{1+2S_n}{S_n}$，……………………………………2 分

$\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=2$，$\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$，

故数列$\{\frac{1}{S_n}\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列.……………………………………4 分

（2）由（1）知 $\frac{1}{S_n}=1+(n-1)\times 2=2n-1$，

则 $S_n=\frac{1}{2n-1}$，……………………………………………………6 分

当 $n\geq 1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}=-\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}$，……………………8 分

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ -\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)}, & n>1.\end{cases}$ ……………………10 分

【命题意图】本题主要考查等差数列的定义和通项公式，以及 a_n 与 S_n 的关系，考察了学生的数学运算，逻辑推理等核心素养.

18.（12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 A 为锐角，$\sin B-\cos C=\dfrac{c^2-a^2}{2ab}$.

（1）求 A；

（2）若 $b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，且 BC 边上的高为 $2\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解：（1）∵ $\sin B-\cos C=\dfrac{c^2-a^2}{2ab}$，

∴ $2ab\sin B=c^2-a^2+2ab\cos C$， ……………………1 分

由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

∴ $2ab\sin B=b^2$，

∴ $2a\sin B=b$， ……………………2 分

由正弦定理，得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

∴ $2\sin A\sin B=\sin B$，

又∵ $B\in(0,\pi)$，即 $\sin B\neq 0$，

∴ $\sin A=\dfrac{1}{2}$. ……………………4 分

∵角 A 为锐角，

∴ $A=\dfrac{\pi}{6}$. ……………………6 分

（2）∵ BC 边上的高为 $2\sqrt{3}$，

∴ $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}a$， ……………………7 分

又 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{bc}{4}$，

∴ $\dfrac{bc}{4}=\sqrt{3}a$，即 $bc=4\sqrt{3}a$， ……………………8 分

又∵ $b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，

$\therefore c^2=16a$，且 $b^2=\dfrac{3}{16}c^2=3a$，…………………………………………10 分

在△ABC 中，由余弦定理，得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3a+16a-a^2}{2\times4\sqrt{3}a}=\dfrac{19-a}{8\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $a=7$，…………………………………………11 分

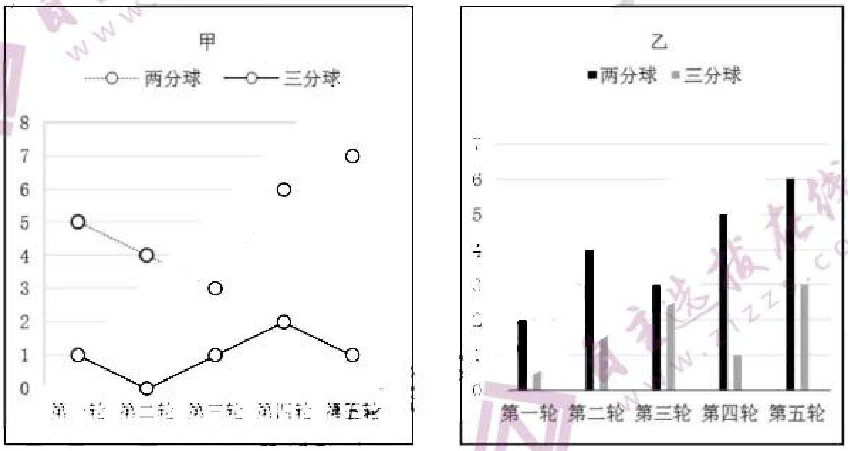
$\therefore S=\sqrt{3}a=7\sqrt{3}$，即△$ABC$ 的面积为 $7\sqrt{3}$．…………………………………………12 分

【命题意图】本题主要考察正弦定理，余弦定理等知识，意在考察考生方程、转化与化归思想，考察了学生的逻辑推理，数学运算等核心素养．

19.（12 分）

某校将进行篮球定点投篮测试，规则为：每人至多投3次，先在 M 处投一次三分球，投进得3分，未投进不得分，以后均在 N 处投两分球，每投进一次得2分，未投进不得分．测试者累计得分高于3分即通过测试，并终止投篮．

甲、乙两位同学为了通过测试，进行了五轮投篮训练，每人每轮在 M 处和 N 处各投10次，根据他们每轮两分球和三分球的命中次数分别得到如下图表：



（第 19 题图）

若以每人五轮投篮训练命中频率的平均值作为其测试时每次投篮命中的概率．

（1）求甲同学通过测试的概率；

（2）若甲、乙两位同学均通过了测试，求甲得分比乙得分高的概率．

解：（1）甲同学两分球投篮命中的概率为 $\dfrac{\frac{5}{10}+\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}}{5}=0.5$，…………………………1 分

甲同学三分球投篮命中的概率为 $\dfrac{\frac{1}{10}+0+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}}{5}=0.1$，…………………………2 分

设甲同学累计得分为 X，

则 $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) = 0.9 \times 0.5 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 \times 0.5 = 0.3$

∴甲同学通过测试的概率为0.3．　……………………………………………………5 分

（2）同（1）可求，乙同学两分球投篮命中的概率为0.4，三分球投篮命中的概率为0.2，　……7 分

设乙同学累计得分为 Y，则

$P(Y=4) = 0.8 \times 0.4 \times 0.4 = 0.128$，　……………………………………8 分

$P(Y=5) = 0.2 \times 0.4 + 0.2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.128$，　……………………………………9 分

设"甲得分比乙得分高"为事件 A，"甲、乙两位同学均通过了测试"为事件 B，

则 $P(AB) = P(X=5) \cdot P(Y=4) = 0.075 \times 0.128 = 0.0096$，　…………………………10 分

$P(B) = [P(X=4) + P(X=5)] \cdot [P(Y=4) + P(Y=5)] = 0.0768$，　……………………11 分

由条件概率公式可得，$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0.0096}{0.0768} = \dfrac{1}{8}$．　…………………………12 分

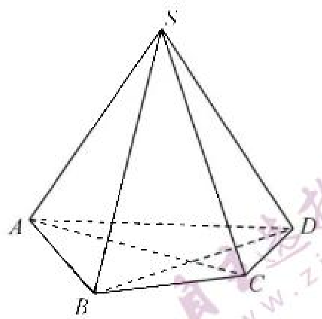
【命题意图】本题以体育运动为背景，通过频率与概率定义以及条件概率公式等知识点，考查学生数学建模、数学运算、逻辑推理等数学核心素养，体现分类讨论的数学思想．

20．（12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA=SB=SC=SD=13$，$AC \perp CD$，$AB=6$，$BD=8$．

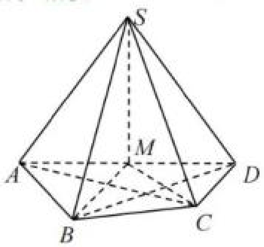
（1）求证：平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $A-SB-D$ 的余弦值．



（第 20 题图）

解：（1）证明：如图所示，取 AD 的中点 M，连接 SM，MC．　……………………1 分



∵ $SA=SD$，

∴ $SM \perp AD$．

∵ $AC \perp CD$，

∴ $\triangle ACD$ 是直角三角形，

∴ $CM = \dfrac{1}{2}AD$，

∴ $AM=CM=DM$．

∵ $SA=SC$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle SAM \cong \mathrm{Rt}\triangle SCM$， ……………………………………………3 分

$\therefore \angle CMS = \angle AMS = \dfrac{\pi}{2}$，

$\because AM \cap CM = M$，

$\therefore SM \perp$ 平面 $ABCD$，

又$\because SM \subset$ 平面 SAD，

$\therefore$ 平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$． ……………………………………………5 分

（2）由（1）可知，$SM \perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore \angle BMS = \angle AMS = \dfrac{\pi}{2}$，

又$\because SA = SB$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle SAM \cong \mathrm{Rt}\triangle SBM$，

$\therefore BM = AM$，

$\therefore A$，B，C，D 四点共圆，

$\therefore AB \perp BD$． ……………………………………………6 分

$\because AB = 6$，$BD = 8$，

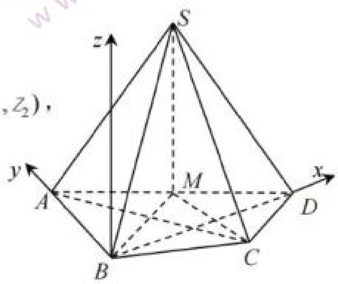
$\therefore AD = 10$，

$\therefore AM = 5$，

又$\because SA = 13$，

$\therefore SM = 12$． ……………………………………………7 分

（解法一）以 B 为坐标原点，BD 为 x 轴，BA 为 y 轴，过点 B 平行于 SM 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，易得 $B(0,0,0)$，$D(8,0,0)$，$A(0,6,0)$，$S(4,3,12)$， ……………………8 分



则有 $\overrightarrow{BS} = (4,3,12)$，$\overrightarrow{BA} = (0,6,0)$，$\overrightarrow{BD} = (8,0,0)$，

分别设平面 ABS 和平面 DBS 的法向量为 $\overline{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $\overline{n} = (x_2, y_2, z_2)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \overline{m} = 0, \\ \overrightarrow{BS} \cdot \overline{m} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 6y_1 = 0, \\ 4x_1 + 3y_1 + 12z_1 = 0, \end{cases}$ ……………………9 分

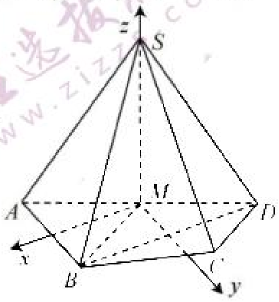
则平面 ABS 的一个法向量为 $\overline{m} = (3,0,-1)$，

同理，平面 DBS 的一个法向量为 $\overline{n} = (0,4,-1)$， ……………………10 分

$\cos < \overline{m}, \overline{n} > = \dfrac{\overline{m} \cdot \overline{n}}{|\overline{m}| \cdot |\overline{n}|} = \dfrac{1}{\sqrt{10} \times \sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{170}}{170}$， ……………………11 分

设二面角 $A-SB-D$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{170}}{170}$. ……………………………………12 分

（解法二）以 M 为坐标原点，过点 M 平行于 DB 的直线为 x 轴，平行于 AB 的直线为 y 轴，MS 为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，易得 $B(4,3,0)$，$D(-4,3,0)$，$A(4,-3,0)$，$S(0,0,12)$，……8 分



则有 $\overline{BS}=(-4,-3,12)$，$\overline{BA}=(0,-6,0)$，$\overline{BD}=(-8,0,0)$，

分别设平面 ABS 和平面 DBS 的法向量为 $\overline{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $\overline{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overline{BA}\cdot\overline{m}=0,\\ \overline{BS}\cdot\overline{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-6y_1=0,\\ -4x_1-3y_1+12z_1=0.\end{cases}$ ……………………………9 分

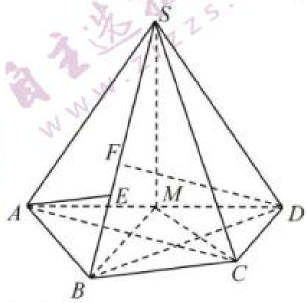
则平面 ABS 的一个法向量为 $\overline{m}=(3,0,1)$，

同理，平面 DBS 的一个法向量为 $\overline{n}=(0,4,1)$， ……………………………………………10 分

$\cos<\overline{m},\overline{n}>=\frac{\overline{m}\cdot\overline{n}}{|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|}=\frac{1}{\sqrt{10}\times\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{170}}{170}$， ……………………………………………11 分

设二面角 $A-SB-D$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{170}}{170}$. ……………………………………12 分

（解法三）如图所示，过点 A，D 分别作 SB 的垂线，并交 SB 于点 E，F. ……………8 分



在等腰△ SAB 中，由 $AB^2-BE^2=AS^2-SE^2$，

得 $6^2-BE^2=13^2-(13-BE)^2$，解得 $BE=\frac{18}{13}$，

在 Rt △ EAB 中，由 $AE^2=AB^2-BE^2=6^2-(\frac{18}{13})^2=\frac{36\times160}{13^2}$. ……………………………9 分

同理，$BF=\frac{32}{13}$，$FD^2=\frac{64\times153}{13^2}$，

则 $EF=BF-BE=\frac{14}{13}$， ……………………………………10 分

由 $\overline{AD}=-\overline{EA}+\overline{EF}+\overline{FD}$，

可得 $\overline{AD}^2=(-\overline{EA}+\overline{EF}+\overline{FD})^2=\overline{EA}^2+\overline{EF}^2+\overline{FD}^2-2\overline{EA}\cdot\overline{FD}$，

则 $10^2=\frac{36\times160}{13^2}+(\frac{14}{13})^2+\frac{64\times153}{13^2}-2\times\sqrt{\frac{36\times160}{13^2}}\times\sqrt{\frac{64\times153}{13^2}}\cos<\overline{EA},\overline{FD}>$，

解得 $\cos<\overline{EA},\overline{FD}>=-\frac{\sqrt{170}}{170}$， ……………………………………………11 分

易知二面角 $A-SB-D$ 的平面角就是 $\overline{EA}$ 与 $\overline{FD}$ 的夹角，

设二面角 $A-SB-D$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{170}}{170}$. ……………………………………12 分

【命题意图】本题主要考察线面垂直的判定与性质，面面垂直的判定，空间向量，二面角的平面角. 涉

及到的思想方法主要有向量法，数形结合思想，等价转化思想. 考察了学生的直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养.

21.（12 分）

设 O 是坐标原点，以 F_1，F_2 为焦点的椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{2}$，以 $|F_1F_2|$ 为直径的圆和 C 恰好有两个交点.

（1）求 C 的方程；

（2）P 是 C 外的一点，过 P 的直线 l_1，l_2 均与 C 相切，且 l_1，l_2 的斜率之积为 $m(-1\le m\le -\frac{1}{2})$，记 u 为 $|PO|$ 的最小值，求 u 的取值范围.

解：（1）由题意，$2a=2\sqrt{2}$，

$\therefore a=\sqrt{2}$，……………………………………………………1 分

又∵以 $|F_1F_2|$ 为直径的圆和 C 恰好有两个交点，

则 $b=c$，……………………………………………………2 分

又∵ $b^2+c^2=a^2=2$，

$\therefore b=c=1$，……………………………………………………3 分

$\therefore C$ 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………………………4 分

(解法一)由题意，l_1，l_2 的斜率存在且不为零，设过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线 $l: y-y_0=k(x-x_0)$，

由方程组 $\begin{cases} y-y_0=k(x-x_0), \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y，

并整理得 $(1+2k^2)x^2+4k(y_0-kx_0)x+2(y_0-kx_0)^2-2=0$，……………………6 分

∵ l 与 C 相切，

$\therefore \Delta=16k^2(y_0-kx_0)^2-8(1+2k^2)((y_0-kx_0)^2-1)=0$，……………………7 分

化简并整理，得 $(y_0-kx_0)^2=2k^2+1$，

整理成关于 k 的一元二次方程得 $(x_0^2-2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-1=0$，（易知 $x_0\neq\pm\sqrt{2}$）……8 分

设 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，

易知 k_1，k_2 为方程 $(x_0^2-2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-1=0$ 的两根，

$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{y_0^2-1}{x_0^2-2}=m$，

$\therefore y_0^2 = mx_0^2 + 1 - 2m$，

$\therefore x_0^2 + y_0^2 = (1+m)x_0^2 + 1 - 2m$， ……………………………………10 分

$\therefore |PO| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(1+m)x_0^2 + 1 - 2m}$，

易知当 $x_0 = 0$ 时，有 $u = |PO|_{\min} = \sqrt{1-2m}$， ……………………………………11 分

又$\because -1 \le m \le -\frac{1}{2}$，

$\therefore \sqrt{2} \le u \le \sqrt{3}$，

即 u 的取值范围为$[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$. ……………………………………12 分

(解法二)由题意，l_1，l_2的斜率存在且不为零，设点 $P(x_0, y_0)$，l_1：$y = kx + b$，l_2：$y = \frac{m}{k}x + n$，

显然 $k \ne \frac{m}{k}$，即 $k^2 - m \ne 0$，

由方程组$\begin{cases} y = kx + b, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$消去 y，并整理得 $(1+2k^2)x^2 + 4kbx + 2b^2 - 2 = 0$， ……………………6 分

$\because l_1$ 与 C 相切，

$\therefore \Delta = (4kb)^2 - 4(2k^2+1)(2b^2-2) = 0$，

即 $b^2 = 2k^2 + 1$， ……………………………………7 分

同理由 l_2 与 C 相切可得，$n^2 = \frac{2m^2}{k^2} + 1$，

由方程组$\begin{cases} y = kx + b, \\ y = \frac{m}{k}x + n, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x_0 = \frac{(n-b)k}{k^2 - m}, \\ y_0 = \frac{k^2 n - bm}{k^2 - m}, \end{cases}$ ……………………………………8 分

$\therefore \begin{cases} x_0^2 = \frac{n^2k^2 + b^2k^2 - 2nbk^2}{(k^2-m)^2}, \\ y_0^2 = \frac{n^2k^4 + b^2m^2 - 2nbmk^2}{(k^2-m)^2}, \end{cases}$

$\therefore y_0^2 - mx_0^2 = \frac{(k^4 - mk^2)n^2 + (m^2 - mk^2)b^2}{(k^2-m)^2} = \frac{k^2n^2 - mb^2}{k^2 - m}$，

又$\because b^2 = 2k^2 + 1$，$n^2 = \frac{2m^2}{k^2} + 1$，

$\therefore y_0^2 - mx_0^2 = \frac{k^2(\frac{2m^2}{k^2} + 1) - m(2k^2+1)}{k^2 - m} = 1 - 2m$，

$\therefore y_0^2 = mx_0^2 + 1 - 2m$，

$\therefore x_0^2 + y_0^2 = (1+m)x_0^2 + 1 - 2m$，　　　　　　　　……………………………………10 分

$\therefore |PO| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(1+m)x_0^2 + 1 - 2m}$，

易知当 $x_0 = 0$ 时，有 $u = |PO|_{\min} = \sqrt{1-2m}$，　　　　　　……………………………………11 分

又∵ $-1 \le m \le -\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \sqrt{2} \le u \le \sqrt{3}$，

即 u 的取值范围为 $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.　　　　　　　　……………………………………12 分

【命题意图】本题以直线与椭圆为载体，以椭圆的双切线（切点弦）性质为背景，利用代数方法解决几何问题，考查学生的逻辑推理，数学运算等数学核心素养及思辨能力.

22.（12 分）

已知函数 $f(x) = a\ln^2 x + 2x(1-\ln x)$，$a \in \mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $g(x) = e^2 f(x) - 2a^2$ 有且仅有 3 个零点，求 a 的取值范围.（其中常数 e=2.718 28…，是自然对数的底数）

解：（1）易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x) = \dfrac{2(a-x)\ln x}{x}$，$f'(1) = 0$，……………1 分

①若 $a \le 0$，当 $x \in (0,1)$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x \in (1,+\infty)$ 时，$f'(x) < 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；　……………………………………2 分

②若 $0 < a < 1$，易知当 $x \in (0,a)$ 时，$f'(x) < 0$；

当 $x \in (a,1)$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x \in (1,+\infty)$ 时，$f'(x) < 0$；

$\therefore f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(a,1)$ 上单调递增；　……………………………3 分

③若 $a = 1$，则 $f'(x) \le 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；　　　　　　……………………………………4 分

④若 $a > 1$，易知当 $x \in (0,1)$ 时，$f'(x) < 0$；

当 $x \in (1,a)$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x \in (a,+\infty)$ 时，$f'(x) < 0$；

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,a)$ 上单调递增.

综上所述，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(a,1)$ 上单调递增；当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,a)$ 上单调递增. ……………………5 分

（2）令 $g(x)=0$，则 $f(x)=\dfrac{2a^2}{e^2}$，

∴依题意可知函数 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{2a^2}{e^2}$ 的图象有 3 个不同的交点，

∴由（1）易知必有 $0<a<1$，或 $a>1$， ……………………6 分

①当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(a,1)$ 上单调递增，

∴ $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=2$，$f(x)$ 的极小值为 $f(a)=a(\ln^2 a-2\ln a+2)$，

又 $f(a)=a(\ln^2 a-2\ln a+2)=a[(\ln a-1)^2+1]>a>\dfrac{2a^2}{e^2}$，

∴函数 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{2a^2}{e^2}$ 的图象至多有1个交点，不合题意， ……………………7 分

②当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,a)$ 上单调递增，

∴ $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=2$，$f(x)$ 的极大值为 $f(a)=a(\ln^2 a-2\ln a+2)$，

∴须有 $2<\dfrac{2a^2}{e^2}<a(\ln^2 a-2\ln a+2)$ 成立，

∵ $2<\dfrac{2a^2}{e^2}$，∴ $a>e$， ……………………8 分

∵ $\dfrac{2a^2}{e^2}<a(\ln^2 a-2\ln a+2)$，∴ $\dfrac{2a}{e^2}<\ln^2 a-2\ln a+2$（*），

下面求不等式（*）的解集，

（解法一）令 $\ln a=x$，则不等式（*）等价于 $2e^{x-2}<x^2-2x+2$，

令函数 $h(x)=x^2-2x-2e^{x-2}+2$，则 $h'(x)=2x-2-2e^{x-2}$，

令 $y=2x-2-2e^{x-2}$，则 $y'=2-2e^{x-2}$，

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−
y	↗	极大值	↘

函数 $y=2x-2-2e^{x-2}$ 在区间 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

又 $y(2)=0$，∴ $y=2x-2-2e^{x-2}\le 0$， ……………………9 分

即 $h'(x)\le 0$ 恒成立，故函数 $h(x)$ 单调递减，

又 $h(2)=0$，∴当且仅当 $x<2$ 时，$h(x)>0$，

深圳市高三数学第一次调研考试试题答案及评分参考第11页（共13页）

$\therefore$不等式$2e^{x-2} < x^2-2x+2$的解集为$(-\infty,2)$，即不等式（*）的解集为$(0,e^2)$， …………10 分

（解法二）令函数$\varphi(a)=\ln^2 a-2\ln a-\dfrac{2a}{e^2}+2$，则$\varphi'(a)=\dfrac{2\ln a-2-\dfrac{2a}{e^2}}{a}$，

令$y=2\ln a-\dfrac{2a}{e^2}-2$，则$y'=\dfrac{2}{a}-\dfrac{2}{e^2}$，

x	$(0,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
y'	+	0	−
y	↗	极大值	↘

$\therefore$函数$y=2\ln a-\dfrac{2a}{e^2}-2$在区间$(0,e^2)$上单调递增，在区间$(e^2,+\infty)$上单调递减.

又$y(e^2)=0$，$\therefore y=2\ln a-\dfrac{2a}{e^2}-2\le 0$. …………9 分

即$\varphi'(a)\le 0$恒成立，故函数$\varphi(a)$单调递减，

又$\varphi(e^2)=0$，$\therefore$不等式$\varphi(a)>0$的解集为$(0,e^2)$， …………10 分

$\therefore$必有$e<a<e^2$，

下面证明，当$e<a<e^2$时，函数$g(x)=e^2f(x)-2a^2$有且仅有3个零点，

（解法一）一方面，当$e<a<e^2$时，$f(e^{-3})=a^3+2e^{-3}(1+a)>a^3>\dfrac{2a^2}{e^2}$， …………11 分

另一方面，当$e<a<e^2$时，$f(e^3)=9a-4e^3<9e^2-4e^3=e^2(9-4e)<0$，$\therefore f(e^3)<f(1)$，

不难知道，当$e<a<e^2$时，函数$g(x)=e^2f(x)-2a^2$有且仅有3个零点，

综上所述，实数a的取值范围为(e,e^2). …………12 分

（解法二）当$e<a<e^2$时，有$f(\dfrac{1}{a})-f(a)=[a\ln^2 a+\dfrac{2}{a}(1+\ln a)]-[a\ln^2 a+2a(1-\ln a)]$

$=\dfrac{2}{a}-2a+(\dfrac{2}{a}+2a)\ln a>\dfrac{2}{a}-2a+(\dfrac{2}{a}+2a)=\dfrac{4}{a}>0$，

$\therefore f(\dfrac{1}{a})>f(a)$， …………11 分

显然当$x>0$时，有$e^x>\dfrac{x^2}{2}$(证明略)，

于是，当$e<a<e^2$时，有$f(e^{a+1})=a(a+1)^2-2ae^{a+1}<a(a+1)^2-a(a+1)^2=0$，

$\therefore f(e^{a+1})<f(1)$，

不难知道，当$e<a<e^2$时，函数$g(x)=e^2f(x)-2a^2$有且仅有3个零点，

综上所述，实数 a 的取值范围为 (e,e^2)．……………………………………………12 分

【命题意图】本题以基本初等函数的单调性和零点问题为载体，考查学生利用导数分析、解决问题的能力，分类讨论思想及逻辑推理、数学运算等数学核心素养，具有较强的综合性.