高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合与常用逻辑用语，函数，导数及其应用，三角函数及解三角形，平面向量，复数，数列，不等式，直线与圆，圆锥曲线。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{3+2x-x^2}\}$，$B=\{y\mid y=e^x+a\}(a\in\mathbf{R})$，若 $A\cap B=\varnothing$，则 a 的取值范围为

A. $[3,+\infty)$　　B. $(3,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,-1]$

2. 已知复数 z 满足 $(8+6i)z=5+12i$，则 $|z|=$

A. $\frac{15}{13}$　　B. $\frac{17}{14}$　　C. $\frac{13}{10}$　　D. $\frac{13\sqrt{7}}{20}$

3. 已知直线 $l_1:x-2y-1=0$，$l_2:2x+my+2\sqrt{5}-2=0$，若 $l_1/\!/l_2$，则 l_1 与 l_2 之间的距离为

A. $\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{5-2\sqrt{5}}{5}$　　C. 2　　D. 1

4. 我国古代历法从东汉的《四分历》开始，就有各节气初日晷影长度和太阳去极度的观测记录，漏刻、晷影成为古代历法的重要计算项目. 唐代僧一行在编制《大衍历》时发明了求任何地方每日晷影长和去极度的计算方法——“九服晷影法”，建立了晷影长 l 与太阳天顶距 θ 之间的对应数表（世界上最早的正切函数表）. 根据三角学知识知：晷影长 l 等于表高 h 与天顶距 θ 正切值的乘积，即 $l=h\tan\theta$. 若对同一表高进行两次测量，测得晷影长分别是表高的 2 倍和 3 倍，记对应的天顶距分别为 θ_1 和 θ_2，则 $\tan(\theta_1-\theta_2)=$

A. 1　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{7}$　　D. -1

5. 已知 F_1,F_2 是平面内两个不同的定点，P 为平面内的动点，则“$||PF_1|-|PF_2||$ 的值为定值 m，且 $m<|F_1F_2|$”是“点 P 的轨迹是双曲线”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 均为单位向量，且 $|\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2|\leqslant\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，则

A. $\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle>\frac{\pi}{3}$　　B. $|\boldsymbol{a}|$ 的最大值为 2

C. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值为 1　　D. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant 2\sqrt{3}$

7. 已知 F_1、F_2 分别是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点,$C$ 过 $A(-2,0)$和 $B(0,1)$两点,点 P 在线段 AB 上,则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的取值范围为

A. $\left[-\frac{11}{5},+\infty\right)$　　B. $\left[-\frac{11}{5},1\right]$　　C. $[-2,1]$　　D. $\left[1,\frac{37}{5}\right]$

8. 已知函数 $f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x}}(x>0)$. 数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,a_{n+1}=f(a_n)$. 记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则

A. $\frac{3}{2}<S_{2\,022}<3$　　B. $3<S_{2\,022}<4$　　C. $4<S_{2\,022}<\frac{9}{2}$　　D. $\frac{9}{2}<S_{2\,022}<5$

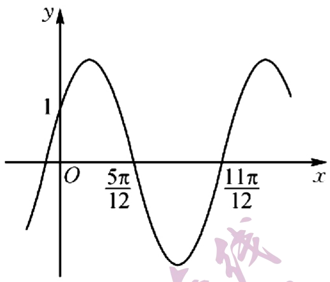
二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知双曲线 C:$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,$F$ 为 C 的下焦点,O 为坐标原点,l_1 是 C 的斜率大于 0 的渐近线,过 F 作斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$的直线 l 交 l_1 于点 A,交 x 正半轴于点 B,若$|OA|=|OB|$,则

A. C 的离心率为 2　　B. C 的离心率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. F 到 l_1 距离为 a　　D. F 到 l_1 距离为 b

10. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示,将 $f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得函数 $g(x)$的图象,则



A. $\omega=2$

B. $g(x)$的图象关于点$(-\pi,0)$对称

C. $g(x)$在$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递增

D. $g(x)$在$(0,\pi)$上有两个极值点

11. 已知定义在$(0,+\infty)$上的函数 $f(x)$满足:① $\forall x>0,f(x)<0$;②对任意正数 a,b,当 $a<b$ 时,$bf(a)>af(b)$恒成立,则

A. $f(\log_2 3)\log_3 2>f(\log_3 4)\log_4 3$　　B. $2f\left(\frac{1}{2}\right)<3f\left(\frac{1}{3}\right)$

C. $\frac{\ln 2}{2}f\left(\frac{\ln 2}{2}\right)>\frac{\ln 3}{3}f\left(\frac{\ln 3}{3}\right)$　　D. $\frac{\ln 2}{2}f\left(\frac{\ln 2}{2}\right)<\frac{\ln 3}{3}f\left(\frac{\ln 3}{3}\right)$

12. 将曲线 C_1:$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1(x\leqslant 0)$和曲线 C_2:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1(x>0)$合成曲线 E. 斜率为 k 的直线 l 与 E 交于 A,B 两点,P 为线段 AB 的中点,则

A. 曲线 E 所围成图形的面积小于 36　　B. 曲线 E 与其对称轴仅有两个交点

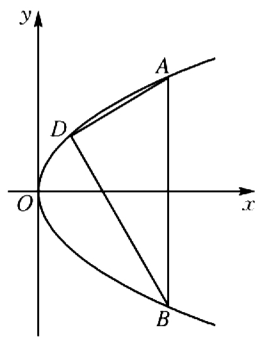
C. 存在 k,使得点 P 的轨迹总在某个椭圆上　　D. 存在 k,使得点 P 的轨迹总在某条直线上

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知 $f(x)=\sin 2x+\tan x+1$,则曲线 $y=f(x)$在点$\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$处的切线方程为__________.

14. 直线 l 过点$(2,1)$且与圆 C:$(x+1)^2+y^2=9$ 相切,则直线 l 的方程为__________.

15. 如图,直线 $x=t$ 与抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$交于 A,B 两点,D 为 C 上异于 A,B 的一点,若 $AD\perp BD$,则点 D 到直线 $x=t$ 的距离与 p 的比值为__________.



16. 若 x_1, x_2 是函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-e^x+1(a\in\mathbf{R})$ 的两个极值点，且 $\frac{x_2}{x_1}\geqslant 2$，则实数 a 的取值范围为__________.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\sin A-c\sin C=(b-c)\sin B$.

(1) 求 A 的大小；

(2) 若△ABC 为锐角三角形，求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知 F 为双曲线 $E:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左焦点，P 为直线 $x=1$ 上一动点，Q 为线段 PF 与 E 的交点. 设 $\frac{|FP|}{|FQ|}=t(t>0)$.

(1) 若点 P 的纵坐标为 s，求 s^2 与 t 间满足的函数关系式；

(2) 证明：存在常数 m,n，使得 $\frac{|FP|}{|FQ|}=m|PF|+n$.

19.（本小题满分 12 分）

在正项数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$\forall n\geqslant 2$，$a_1+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2n-3}=\frac{a_n-1}{2}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_1$，$b_2=a_2-1$，且 $\ln b_n+\ln b_{n+2}=2\ln b_{n+1}$，设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n\cdot T_{n+2}<T_{n+1}^2$.

20.(本小题满分 12 分)

已知直线 $l_1: x-ay+2=0$, $l_2: ax+y-2a=0(a\in\mathbf{R})$,若 l_1 与 l_2 的交点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程;来源:高三答案公众号

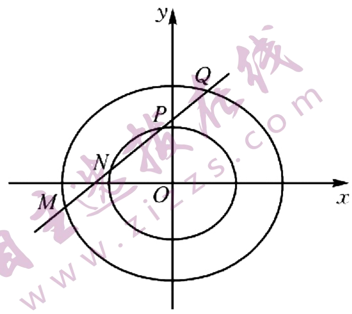
(2)若圆 $E: x^2+y^2-2mx-2ny=0$ 的圆心在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上,且与曲线 C 相交所得公共弦 MN 的长为 $2\sqrt{3}$,求 m,n 的值.

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $F_1(-1,0)$,其左顶点为 A,上顶点为 B,且 F_1 到直线 AB 的距离为$\frac{\sqrt{7}}{7}|OB|$(O 为坐标原点).

(1)求 C 的方程;来源:高三答案公众号

(2)若椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1)$,则称椭圆 E 为椭圆 C 的 λ 倍相似椭圆. 已知椭圆 E 是椭圆 C 的 3 倍相似椭圆,直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆 C,E 交于四点(依次为 M,N,P,Q,如图),且 $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{NQ}$,证明:点 $T(k,m)$ 在定曲线上.



22.(本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=x^2+x+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $a=1$,函数 $g(x)=x+1-f(x)$, $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$, $x_1\neq x_2$, $|x_1g(x_2)-x_2g(x_1)|>\lambda|x_1-x_2|$ 恒成立,求实数 λ 的取值范围.