

江门市 2023 年普通高中高二调研测试（二）

数学答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	A	A	B	C	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

题号	9	10	11	12
答案	AB	BD	AC	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{1}{e}$	5	$\frac{7}{18}$	1.96（3分）；196（2分）

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.解：（1） $\because a_2 = 6, a_4 = 20$,

$$\therefore b_2 = \frac{a_2}{2} = 3, b_4 = \frac{a_4}{4} = 5, \dots\dots\dots 2 \text{ 分（各 1 分）}$$

$\because$ 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列， $b_2 = 3, b_4 = 5$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的公差为 1，首项为 2， $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式是 $b_n = n + 1$ ， $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$(2) \because b_n = \frac{a_n}{n} = n + 1$$

$$\therefore a_n = n(n + 1), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{数列} \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \text{的前} n \text{项和} S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} = 1 - \frac{1}{n + 1} = \frac{n}{n + 1}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. (1) 证明: $\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD , 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PCD = CD$,

$AD \subset$ 平面 $ABCD$, $AD \perp DC$, 1 分

$\therefore AD \perp$ 平面 PCD , 2 分

又 $PC \subset$ 平面 PCD , 3 分

$\therefore AD \perp PC$ 4 分

(2) 解法 (一) 过点 P 分别作 $PE \perp DC$, $PF \perp AB$, 垂足为点 E , F ,

连结 PE 于, DE , EF , PF 和 AF , 5 分

$\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD , 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PCD = CD$,

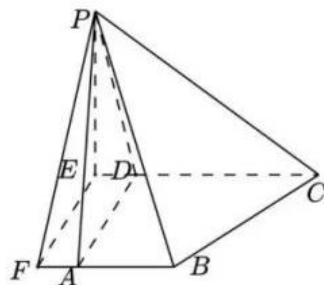
$PE \subset$ 平面 PCD , $PE \perp DC$, 6 分

$\therefore \angle PFE$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角, 8 分

在 $Rt\triangle PEF$ 中, $PE = \sqrt{3}$, $EF = AD = 2$,

$\therefore \tan \angle PFE = \frac{PE}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 10 分

$\therefore \cos \angle PFE = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 11 分



故平面 PAB 与平面 ABC 所成的夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 12 分

解法 (二) 在平面 PCD 内过点 D 作 $DH \perp DC$, 且交 PC 于 H ,

$\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD ,

平面 $ABCD \cap$ 平面 $PCD = CD$,

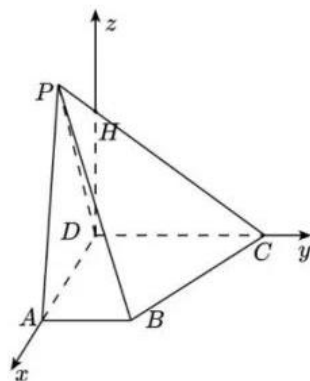
$AD \subset$ 平面 $ABCD$,

$DH \perp DC$,

$\therefore DH \perp$ 平面 PCD , 5 分

如图, 以 D 为坐标原点, DA, DC, DH 所在直线分别为 x 轴,

y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 6 分



则 $D(0,0,0)$, $P(0,-1,\sqrt{3})$, $A(2,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(0,2,0)$ 7 分

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n} = (0,0,1)$, 8 分

设平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$,

$$\therefore \vec{PA} = (2, 1, -\sqrt{3}), \vec{AB} = (0, 1, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{PA} = 2x + y - \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AB} = y = 0 \end{cases}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{取 } z = 2, \text{ 则 } \vec{m} = (\sqrt{3}, 0, 2) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设平面 PAB 与平面 ABC 的夹角的为 θ ,

$$\therefore \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{故平面 } PAB \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成的夹角的余弦值为 } \frac{2\sqrt{7}}{7} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 零假设为 H_0 : 喜爱足球运动与性别相互独立, 即喜爱足球运动与性别无关, 1 分

$$\therefore \chi^2 = \frac{200 \times (60 \times 80 - 20 \times 40)^2}{80 \times 120 \times 100 \times 100} \approx 33.33 > 10.28 = \chi_{0.001}^2, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$\therefore$ 依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的 χ^2 独立性检验, 推断 H_0 不成立,

即能认为喜爱足球运动与性别有关, 此推断犯错误的概率不超过 0.001..... 5 分

(2) 由题意得 X 的可能取值为 0, 1, 2, 6 分

$X = 0$, 即 $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C$,

$$\therefore P(X = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$X = 1$, 即 $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C, A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A, A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$,

$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A, A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C$,

$$\therefore P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{18}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$X = 2, A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B, A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B$,

$$\therefore P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

∴ X 的分布列:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{2}{9}$

..... 10 分

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{11}{18} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{19}{18} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 由 $\bar{t} \approx 2.46, \bar{y} \approx 38.86, \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) \approx 80.97, \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2 \approx 3.78,$

$$\text{有 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{80.97}{3.78} \approx 21.42 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 38.86 - 21.42 \times 2.46 \approx -13.8 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以模型②中 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 21.4\sqrt{x} - 13.8$ 5 分

(2) 由表格中的数据, 有 $182.42 > 74.12$, 即 $\frac{182.42}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} > \frac{74.12}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

模型①的决定系数 R^2 小于模型②, 说明回归模型②刻画的拟合效果更好..... 9 分 (只是判断模型②刻画的拟合效果更好, 没有根据数据说明, 得 2 分)

若要使年收益增量超过 80 万元, 则令 $21.4\sqrt{x} - 13.8 > 80, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{得 } \sqrt{x} > \frac{93.8}{21.4} \approx 4.4 \text{ 即 } x \geq 4.4^2 = 19.36, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

∴ 人工投入增量至少需要 20 人. 12 分

21. 解: (1) 若 $a = 1, f(x) = e^{2x} - e^x - x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty), \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1 = (2e^x + 1)(e^x - 1), \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

令 $f'(x) > 0$, 则 $x > 0$, 令 $f'(x) < 0$, 则 $x < 0$, 3 分

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ 4 分

$$(2) f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (2e^x + 1)(ae^x - 1), \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

若 $a \geq 1$,

$$\text{令 } f'(x) = (2e^x + 1)(ae^x - 1) = 0, \text{ 解得 } x = -\ln a, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 7 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 8 分

$$\text{当 } x = -\ln a \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最小值, } f(x) \text{ 的最小值为 } f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

若 $f(x)$ 有零点, 则有 $f(x)_{\min} \leq 0$,

当 $a = 1$ 时,

$$f(-\ln a) = 0, \text{ 故 } f(x) \text{ 只有一个零点, } \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

当 $a \in (1, +\infty)$ 时,

$1 - \frac{1}{a} > 0, \ln a > 0$, 故 $f(x)$ 没有零点, 11 分

综上所述, 当 $a=1$ 时, $f(x)$ 有一个零点; 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 没有零点, 12 分

22. 解: (1) $\because$ 双曲线 $y^2 - x^2 = \frac{1}{2}$ 的焦距为 $2c=2$,

$\therefore c=1$, 1 分

$\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore a = \sqrt{2}$, 2 分

$\because a^2 = b^2 + c^2$, $\therefore a^2 = 2$, $b^2 = 1$, 3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 4 分

(2) 解法 (一) 设 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$,

当直线 l 的斜率不存在时, 则直线 l 的方程为 $x=-1$, 5 分

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ 解得 $D(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}), E(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, 6 分

$\therefore \frac{S_{\triangle MEF}}{S_{\triangle BDF}} = -\frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{y_2}{y_1} = -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \times (-1) = 3-2\sqrt{2}$; 7 分

当直线 l 的斜率存在时, 则直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x+1) \end{cases}$ 消去 x 得, $(2k^2+1)y^2 - 2ky - k^2 = 0$,

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = \frac{2k}{2k^2+1}$, $y_1 y_2 = -\frac{k^2}{2k^2+1}$, 8 分

设 $\frac{y_2}{y_1} = t (t \neq -1)$, 则 $\frac{(y_1 + y_2)^2}{y_1 y_2} = \frac{(t+1)^2}{t} = -\frac{4}{2k^2+1}$, 9 分

$\because k^2 \in (0, +\infty)$, $\therefore \frac{(t+1)^2}{t} = -\frac{4}{2k^2+1} \in (-4, 0)$, 10 分

由 $-4 < \frac{(t+1)^2}{t} < 0$, 解得 $-3-2\sqrt{2} < t < -1$ 或 $-1 < t < -3+2\sqrt{2}$, 11 分

$\therefore \frac{S_{\triangle MEF}}{S_{\triangle BDF}} = -\frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{y_2}{y_1} = -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \times t \in (17-12\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}) \cup (3-2\sqrt{2}, 1)$,

综上所述, $\triangle AEF$ 与 $\triangle BDF$ 的面积之比的取值范围为 $(17-12\sqrt{2}, 1)$, 12 分

(2) 解法 (二) 设 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$,

设直线 l 的方程为 $x=my-1$, 5 分

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x = my - 1 \end{cases} \text{消去 } x \text{ 得, } (m^2 + 2)y^2 - 2my - 1 = 0,$$

$$\text{由韦达定理得 } y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 2}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{设 } \frac{y_2}{y_1} = t, \text{ 则 } \frac{(y_1 + y_2)^2}{y_1 y_2} = \frac{(t+1)^2}{t} = -\frac{4m^2}{m^2 + 2}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because m^2 \in [0, +\infty), \therefore \frac{(t+1)^2}{t} = -\frac{4m^2}{m^2 + 2} \in (-4, 0], \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } -4 < \frac{(t+1)^2}{t} \leq 0, \text{ 解得 } -3 - 2\sqrt{2} < t < -3 + 2\sqrt{2}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BDF}} = -\frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{y_2}{y_1} = -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \times t \in (17-12\sqrt{2}, 1),$$

综上所述, $\triangle AEF$ 与 $\triangle BDF$ 的面积之比的取值范围为 $(17-12\sqrt{2}, 1)$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站(网址: www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线

