

2022-2023 学年 江苏常州市高级中学

高三年级 1 月月考 数学试卷

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

- 集合 $A = \{x | 2x + 3 < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x > -2\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
A. $\{0, 1\}$ B. $\{1\}$
C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{1, 2\}$
- 已知 i 为虚数单位, 下列各式的运算结果为纯虚数的是 (\quad)
A. $i(1+i)$ B. $i(1-i)^2$ C. $i^2(1+i)^2$ D. $i+i^2+i^3+i^4$
- 已知圆锥 SO 的底面半径为 3, 母线长为 5. 若球 O_1 在圆锥 SO 内, 则球 O_1 的体积的最大值为 (\quad)
A. $\frac{9\pi}{2}$ B. 9π C. $\frac{32\pi}{3}$ D. 12π
- 若函数 $f(x) = x^2 \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < 2\pi$) 的图象关于原点对称, 则 $\varphi = (\quad)$
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $\frac{3\pi}{2}$
- 已知两个单位向量 \vec{a} , \vec{b} 的夹角为 60° , 设 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (其中 $x, y \in \mathbb{R}$), 若 $|\vec{c}| = 3$, 则 xy 的最大值 (\quad)
A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. $2\sqrt{3}$
- 曲线 $y = \frac{2}{x} - \ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线的倾斜角为 α , 则 $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2})$ 的值为 (\quad)
A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$
- 已知点 P 是抛物线 $x^2 = 2y$ 上的一点, 在点 P 处的切线恰好过点 $(0, -\frac{1}{2})$, 则点 P 到抛物线焦点的距离为 (\quad)
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2
- 在一个质地均匀的正四面体木块的四个面上分别标有数字 1, 2, 3, 4. 连续抛掷这个正四面体木块两次, 并记录每次正四面体木块朝下的面上的数字, 记事件 A 为“两次记录的数字之和为奇数”, 事件 B 为“第一次记录的数字为奇数”, 事件 C 为“第二次记录的数字为偶数”, 则下列结论正确的是 (\quad)
A. 事件 B 与事件 C 是对立事件 B. 事件 A 与事件 B 不是相互独立事件
C. $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$ D. $P(ABC) = \frac{1}{8}$

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 关于一组样本数据的平均数、中位数、频率分布直方图和方差，下列说法正确的是 ()
- A. 改变其中一个数据，平均数和中位数都会发生改变
 B. 频率分布直方图中，中位数左边和右边的直方图的面积应该相等
 C. 若数据的频率分布直方图为单峰不对称，且在左边“拖尾”，则平均数小于中位数
 D. 样本数据的方差越小，说明样本数据的离散程度越小
10. 下列式子的运算结果为 $\sqrt{3}$ 的是 ()

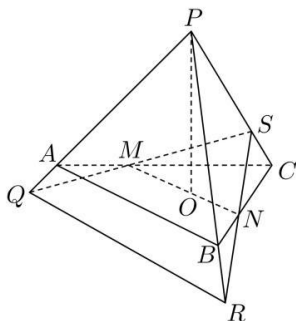
A. $2(\sin 35^\circ \cos 25^\circ - \cos 35^\circ \sin 25^\circ)$ B. $2(\cos 35^\circ \cos 5^\circ + \sin 35^\circ \sin 5^\circ)$

C. $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$ D. $\frac{\tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{6}}$

11. 已知 $A(4, 2)$, $B(0, 4)$, 圆 $C: (x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$, P 为圆 C 上的动点，下列结论正确的是 ()

- A. $|PB| - |PA|$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$
 B. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 -4
 C. $x+y$ 的最小值为 $5 - 2\sqrt{2}$
 D. $\angle PBA$ 最大时, $|PB| = 2\sqrt{5}$

12. 如图，点 O 是正四面体 $PABC$ 底面 ABC 的中心，过点 O 且平行于平面 PAB 的直线分别交 AC , BC 于点 M , N , S 是棱 PC 上的点，平面 SMN 与棱 PA 的延长线相交于点 Q , 与棱 PB 的延长线相交于点 R , 则 ()



- A. 若 $MN \parallel$ 平面 PAB , 则 $AB \parallel RQ$
 B. 存在点 S 与直线 MN , 使 $\overrightarrow{PS} \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}) = 0$
 C. 存在点 S 与直线 MN , 使 $PC \perp$ 平面 SRQ
 D. $\frac{1}{|\overrightarrow{PQ}|} + \frac{1}{|\overrightarrow{PR}|} + \frac{1}{|\overrightarrow{PS}|} = \frac{3}{|\overrightarrow{PA}|}$

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的增函数, 且 $f(m+1) > f(2m-1)$, 则 m 的取值范围是_____.

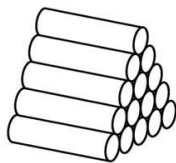
14. 已知抛物线的方程为 $y = 2ax^2$, 且过点 $(1, 4)$, 则焦点坐标为_____.

15. 函数 $f(x) = \sin^3 x + 3\cos^2 x$ $\left(x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的值域为_____.

16. “垛积术”(隙积术)是由北宋科学家沈括在《梦溪笔谈》中首创,南宋数学家杨辉、元代数学家朱世杰丰富和发展的一类数列求和方法,有茭草垛、方垛、刍童垛、三角垛等等.某仓库中部分货物堆放成如图所示的“茭草垛”:自上而下,第一层1件,以后每一层比上一层多1件,最后一层是 n 件.已知第一层货物单价1万元,从第二层起,货物的

单价是上一层单价的 $\frac{7}{8}$, 第 n 层的货物的价格为_____, 若这堆货物总价是 $64 - 112\left(\frac{7}{8}\right)^n$

万元, 则 n 的值为_____.



四、解答题(本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正整数 M , 同时满足如下两个条件: ①对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, 都有 $|a_n| \leq M$ 成立; ②存在 $n_0 \in \mathbf{N}_+$, 使得 $|a_{n_0}| = M$. 则称数列 $\{a_n\}$ 为 B_M 数列.

(1)若 $a_n = 1 - n$, $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, 判断数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是否为 B_M 数列, 并说明理由; (5分)

(2)若 B_M 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = p$, $a_n = \sin a_{n-1} (n \geq 2)$, 求实数 p 的取值集合. (5分)

18. 灵活就业的岗位主要集中在近些年兴起的主播、自媒体、配音, 还有电竞、电商这些新兴产业上. 只要有网络、有电脑, 随时随地都可以办公. 这些岗位出现的背后都离不开互联网的加速发展和短视频时代的大背景. 甲、乙两人同时竞聘某公司的主播岗位, 采取三局两胜制进行比赛, 假设甲每局比赛获胜的概率为 $\frac{2}{5}$, 且每局比赛都分出了胜负.

(1)求比赛结束时乙获胜的概率; (6分)

(2)比赛结束时, 记甲获胜的局数为随机变量 X , 求随机变量 X 的分布列. (6分)

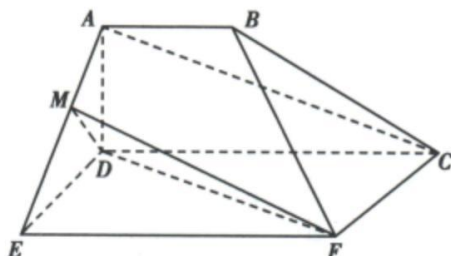
19. 在① $4a \sin B \cos A = \sqrt{3}b$, ② $b \sin^2 B + c \sin^2 C = (b+c) \sin^2 A$,

③ $\sqrt{3} \sin A + \cos A = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$. 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求出 $\cos B$ 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由. (7分)

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos C = \frac{1}{3}$, _____.

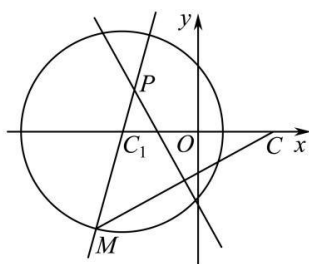
注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

20. 如图, 空间几何体 $ADE-BCF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是梯形, $AB \parallel CD$, 四边形 $CDEF$ 是矩形, 且平面 $ABCD \perp$ 平面 $CDEF$, $AD \perp DC$, $AB = AD = DE = 2$, $EF = 4$, M 是线段 AE 上的动点.



- (1) 试确定点 M 的位置, 使 $AC \parallel$ 平面 MDF , 并说明理由; (7分)
 (2) 在 (1) 的条件下, 平面 MDF 将几何体 $ADE-BCF$ 分成两部分, 求空间几何体 $M-DEF$ 与空间几何体 $ADM-BCF$ 的体积的比值. (7分)

21. 已知圆 $C_1: (x+5)^2 + y^2 = 36$, 点 $C(5,0)$, 点 M 是圆 C_1 上的动点, MC 的垂直平分线交直线 MC_1 于点 P .



- (1) 求点 P 的轨迹方程 C_2 ; (5分)
 (2) 过点 $N(4,0)$ 的直线 l 交曲线 C_2 于 A, B 两点, 在 x 轴上是否存在点 G , 使得直线 AG 和 BG 的倾斜角互补, 若存在, 求出点 G 的坐标, 若不存在, 请说明理由. (6分)

22. 设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $a = -3$, 求 $f(x)$ 的单调区间; (5分)
 (2) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$,
 (i) 证明: $f(x)$ 恰有一个极值点; (5分)
 (ii) 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 若 x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明: $3x_0 - x_1 > 2$. (6分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线



自主选拔在线
微信号：zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw