数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	C	B	A	B	A	D	AB	ABC	CD	ABD

1.【解析】因为 $A=\{x|-3<x<3\}, B=\{x|x\geqslant-2\}$，所以 $A\cup B=(-3,+\infty)$。选 D

2.【解析】$\sin 2010°=\sin 210°=-\sin 30°=-\dfrac{1}{2}$ 选 C

3.【解析】略

4.【解析】略

5.【解析】①若 ΔABC 是锐角三角形，则 $90^{\circ}>A>90^{\circ}-B>0$，于是 $\sin A>\sin(90^{\circ}-B)=\cos B$，同理得 $\sin B>\cos C, \sin C>\cos A$, 所以 $\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$；

②取 $A=90^{\circ}, B=45^{\circ}, C=45^{\circ}$，满足 $\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$，但是 ΔABC 不是锐角三角形。由上："ΔABC 是锐角三角形"是"$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$"的充分不必要条件。选 A

6.【解析】解析：由题意知 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+a}+b$ 为定义在 R 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，$f(-1)=-f(1)$，于是 $\dfrac{1}{1+a}+b=0, \dfrac{1}{\frac{1}{2}+a}+b=-\dfrac{1}{2+a}-b$，解得：$a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$。经检验，符合题意。选 B

7.【解析】因为 $a=\log_7 6=\dfrac{1}{\log_6 7}=\dfrac{1}{1+\log_6\frac{7}{6}}$, $b=\log_8 7=\dfrac{1}{\log_7 8}=\dfrac{1}{1+\log_7\frac{8}{7}}$, $c=\log_9 8=\dfrac{1}{\log_8 9}=\dfrac{1}{1+\log_8\frac{9}{8}}$,

所以：$a<b<c$ 选 A

8.【解析】令 $b=0$ 得 $f(0)=2$，再令 $b=1$ 得 $f(a+1)+f(a-1)=f(a)f(1)$，于是 $f(a+1)+f(a-1)=0$，即 $f(a+2)=-f(a)$；所以 $f(-2026)=f(2)=-f(0)=-2$。选 D

9.【解析】由题意知 $f(x)=\dfrac{10^x}{10^x+1}$ 的值域是 $(0,1)$，所以 $f(x)-\dfrac{1}{2}$ 的范围是 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，

于是 $y=\left[f(x)-\dfrac{1}{2}\right]$ 的函数值可能是 -1 和 0。AB

10.【解析】由 $3\vec{PA}+2\vec{PB}+\vec{PC}=\mathbf{0}$ 知 $2(\vec{PA}+\vec{PB})+(\vec{PA}+\vec{PC})=\mathbf{0}$，设 M,N 分别是 AB,AC 的中点，所以 $2\vec{PM}+\vec{PN}=\mathbf{0}$，于是点 P 是中位线 MN 上靠近点 M 的三等分点，从而 ABC 项正确。

11.【解析】由题意函数 $f(x)=\left|\sqrt{2}\sin(x+\varphi+\dfrac{\pi}{4})\right|(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$，其对称轴为 $x_0=\dfrac{k}{2}\pi-\dfrac{\pi}{4}-\varphi$，所以令 $x_0=\dfrac{\pi}{6}$ 得，解

得$\varphi=\frac{k}{2}\pi-\frac{\pi}{12}$，于是 A 错，另外分析知函数没有对称中心，故 B 错，于是选 CD

12.【解析】ABD，对于 A：注意到函数$f(x)=xe^x-e^2$在$(0,+\infty)$上单调递增，

且$f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}-e^2=e^{\frac{3}{2}}(\frac{3}{2}-e^{\frac{1}{2}})<0, f(2)=2e^2-e^2>0$，所以$\frac{3}{2}<a<2$；

对于 B：注意到a是函数$y_1=e^x$与$y_2=\frac{e^2}{x}$的交点 P 横坐标，实数b是函数$y_3=\ln x$与$y_2=\frac{e^2}{x}$的交点 Q 横坐标，注意到 P,Q 两点关于直线$y=x$对称，所以$b=e^a$，于是$ab=ae^a=e^2$；

对于 C：由上$a+b>2\sqrt{ab}=2e$；对于 D：由上$b-a=\frac{e^2}{a}-a<\frac{e^2}{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}<e^2-3$。

13.【答案】$\frac{7}{13}$【解析】将$|3\mathbf{a}+2\mathbf{b}|=|5\mathbf{a}-4\mathbf{b}|$两边平方得$9\mathbf{a}^2+4\mathbf{b}^2+12\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=25\mathbf{a}^2+16\mathbf{b}^2-40\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$,化简得$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{7}{13}$，即$\cos<\mathbf{a},\mathbf{b}>$的值是$\frac{7}{13}$.

14.【答案】$\frac{3\sqrt{3}}{4}$【解析】由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-bc$，代入数据解得$c=1$，所以△ABC 的面积是$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

15.【答案】$(4,+\infty)$【解析】不妨设$a>b>c>d$，则由题意知$c=-b,d=-a$且$ab=1,a>1$，

则$|a|+|b|+|c|+|d|=2(a+b)=2(a+\frac{1}{a})>4$，所以$|a|+|b|+|c|+|d|$的取值范围是$(4,+\infty)$.

16.【答案】2，$-\frac{3\pi}{8}$【解析】函数$y=\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$的函数图像关于点$(m,n)(m<0)$对称后的解析式为：$y=2n+\cos 2(2m-x)=2n+\sin(\frac{\pi}{2}+2x-4m)$，与$y=k\sin x\cos x=\frac{k}{2}\sin 2x(k>0)$解析式对比知$k=2,n=0,k+n=2,\frac{\pi}{2}-4m=2t\pi(t\in Z)$，所以$k+n=2,m$的最大值是$-\frac{3\pi}{8}$.

17.【解析】(1) 由题意$A=2,\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$A=2,\omega=2$ ………………………………… 5 分

(2) 由题意$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，

于是$\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以函数$f(x)$的值域为$\left[-\sqrt{3},2\right]$ ……………………… 10 分

18.【解析】(1) 若$a=2$，则$f(x)=4^x-2\cdot 2^x+3$.

所以$f(\log_2 3)=4^{\log_2 3}-2\times 2^{\log_2 3}+3=3^2-2\times 3+3=6$. ……………………………………4 分

（2）由题意知 $f(x)=4^x-a\cdot 2^x+3$ 为从区间 $[-2,2]$ 到区间 $[1,+\infty)$ 的一个函数，

其定义域为 $[-2,2]$，值域为 $[1,+\infty)$ 的子集，

问题转化为 $x\in[-2,2]$ 时，有 $f(x)=4^x-a\cdot 2^x+3\in[1,+\infty)$ 恒成立，

令 $t=2^x\in\left[\dfrac{1}{4},4\right]$，即有 $t\in\left[\dfrac{1}{4},4\right]$ 时都有 $1\le y=t^2-a\cdot t+3$ 恒成立.

即 $a\le t+\dfrac{2}{t}$ 对一切 $t\in\left[\dfrac{1}{4},4\right]$ 恒成立.注意到当 $t\in\left[\dfrac{1}{4},4\right]$ 时，

函数 $h(t)=t+\dfrac{2}{t}$ 的最小值为 $h(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$，所以 a 的取值范围是 $\left(-\infty,2\sqrt{2}\right]$，

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,2\sqrt{2}\right]$. ……………………………………………………12 分

19.【解析】（1）由题意知 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，

所以 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{x}{2}\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OB}$ 且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+\dfrac{y}{3}\overrightarrow{OD}$，

注意到 B,P,C 共线且 A,P,D 共线，所以 $\begin{cases}x+\dfrac{y}{3}=1\\ \dfrac{x}{2}+y=1\end{cases}$ 共线，

解得 $x=\dfrac{4}{5},y=\dfrac{3}{5}$；……………………………………………………………………6 分

（2）由（1）知 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$，结合 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}=\mu\overrightarrow{OB}$.

于是 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{4}{5\lambda}\overrightarrow{OM}+\dfrac{3}{5\mu}\overrightarrow{ON}$，所以 $\dfrac{4}{5\lambda}+\dfrac{3}{5\mu}=1$。

所以 $\lambda+\mu=(\lambda+\mu)(\dfrac{4}{5\lambda}+\dfrac{3}{5\mu})=\dfrac{7}{5}+\dfrac{4\mu}{5\lambda}+\dfrac{3\lambda}{5\mu}\ge\dfrac{7}{5}+\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$

于是 $\lambda+\mu$ 的最小值为 $\dfrac{7}{5}+\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$ ……………………………………………………12 分

20.【解析】（1）当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=2\lg(10^x+1)-x$.

注意到函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R，关于原点对称.

由于 $f\left(x\right)-f\left(-x\right)=2\lg(10^x+1)-x-\left[2\lg(10^{-x}+1)-(-x)\right]$

$=2\lg\dfrac{10^{x}+1}{10^{-x}+1}-2x=2\lg\dfrac{10^{2x}+10^{x}}{1+10^{x}}-2x=2\lg10^{x}-2x=0$ 对一切 $x\in R$ 都成立.

所以函数 $f(x)$ 为偶函数. .... 4 分

（2）当 $a>0$ 时，函数 $f(x)=2\lg(10^{x}+a)-x$ 的定义域为 R.

假设存在直线 $x=x_0$，使得函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=x_0$ 对称.

即有 $f(x)=f(2x_0-x)$ 对一切 $x\in R$ 都成立.

即 $2\lg(10^{x}+a)-x=2\lg(10^{2x_0-x}+a)-(2x_0-x)$ 对一切 $x\in R$ 都成立.

也就是 $\lg\dfrac{10^{x}+a}{10^{2x_0-x}+a}=x-x_0$ 即 $\dfrac{10^{x}+a}{10^{2x_0-x}+a}=10^{x-x_0}$ 对一切 $x\in R$ 都成立.

转化得 $(1-a10^{-x_0})10^{x}+(a-10^{x_0})=0$ 对一切 $x\in R$ 都成立.

于是 $\begin{cases}1-a10^{-x_0}=0\\ a-10^{x_0}=0\end{cases}$，解之得 $x_0=\lg a$.

经检验，函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\lg a$ 对称.

综上，当 $a>0$ 时，存在直线 $x=x_0$，使得函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=x_0$ 对称，其中 $x_0=\lg a$.

.... 12 分

21.【解析】（1）$OA=\dfrac{AD}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\theta}=\dfrac{\sin45^\circ}{\tan75^\circ}=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$； · · · · · · · · · · · · · · 5 分

（2）由题意知 $BC=\sin\alpha$，

$AB=OB-OA=\cos\alpha-\dfrac{\sin\alpha}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)$，

$S=BC\cdot AB=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)$，$S=\dfrac{1}{2\sin\theta}(\cos(\theta-2\alpha)-\cos\theta)$，

所以 $\theta=2\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时 S 最大，最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ .... 12 分

22.【解析】证明：（1）□设曲线 $y=f(x)$ 在 $Q(x_1,y_1)$ 点处切线是 $y=x$，则 $\begin{cases}y_1=x_1\\ f'(x_1)=1\end{cases}$

由于 $f'(x_1)=e^{x_1-1}$ 所以 $x_1=1,y_1=1$，

由题意知：$y_1=e^{x_1-1}-a$，于是 $a=0$.

□ $h(x)=f(x)-g(x)=e^{x-1}-\ln x, h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}(x>0)$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$0<e^{x-1}<1,0<x<1$，所以 $0<e^{x-1}<1<\dfrac{1}{x}$，

即 $h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}<0$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$1<e^{x-1},1<x$，所以 $e^{x-1}>1>\dfrac{1}{x}>0$，

即 $h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}>0$，

于是 $h(x)=f(x)-g(x)=e^{x-1}-\ln x$, 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增，

其最小值是 $h(1)=1$，所以 $h(x)=f(x)-g(x)\geq 1$，于是原不等式成立…………………… 6 分

（2）$h(x)=e^{x-1}-\ln x-ax+a(x>0)$ 有且只有一个零点 x_0，$h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}-a$，

注意到 $h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}-a$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数且值域为 R，

所以 $h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}-a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点 x_2，

且 $h'(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上为负，$(x_2,+\infty)$ 上为正，

所以 $h(x_2)$ 为极小值，

又函数 $h(x)$ 有唯一零点 x_0，结合 $h(x)$ 的单调性知 $x_2=x_0$，

所以 $\begin{cases} h'(x_0)=0 \\ h(x_0)=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} e^{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0}-a=0 \\ e^{x_0-1}-\ln x_0-ax_0+a=0 \end{cases}$，

即 $e^{x_0-1}-(e^{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0})x_0-\ln x_0+(e^{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0})=0$，

即 $(2-x_0)e^{x_0-1}+\dfrac{x_0-1}{x_0}-\ln x_0=0$.

令 $H(x)=(2-x)e^{x-1}+\dfrac{x-1}{x}-\ln x(x>0)$，

显然，x_0 是 $H(x)$ 的零点，

$H'(x)=(1-x)e^{x-1}+\dfrac{1-x}{x^2}=(1-x)\left[e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}\right](x>0)$，

$H'(x)$ 在 $(0,1)$ 上为正，$(1,+\infty)$ 上为负，

于是 $H(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

注意到 $H(1)=1>0, H(2)=\dfrac{1}{2}-\ln 2=\dfrac{1}{2}(1-\ln 4)<0$，

所以 $H(x)$ 在 $(1,2)$ 内有一个零点，在 $\left[2,+\infty\right)$ 内无零点，

所以 $H(x)$ 的零点一定小于 2，从而原命题得证.………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。