2023年河南省五市高三第二次联考

数学（理科）参考答案

温馨提示：解答题解题方法不唯一。参考答案只给出了大致评分标准，阅卷老师请根据考生作答情况酌情细化给分。

一、选择题： 1.A　2.D　3.C　4.B　5.D　6.C　7.C　8.B　9.D　10.C　11.B　12.A

二、填空题： 13. 2　14. $\dfrac{1}{10}$　15. $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$　16. 2

三、解答题：

17.证明：(1)由已知 $2a_{n+1}-a_{n+1}a_n=1$，得 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$　整理为：$\dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_n}=1$，

$\therefore\left\{\dfrac{1}{1-a_n}\right\}$为等差数列，公差 $d=1$，首项为 $\dfrac{1}{1-a_1}=3$；来源：高三答案公众号　…………4分

所以 $\dfrac{1}{1-a_n}=3+(n-1)=n+2$，整理为：$a_n=\dfrac{n+1}{n+2}\left(n\in N^*\right)$，经检验，符合要求　…………6分

（2）由（1）得：$a_n=\dfrac{n+1}{n+2}\left(n\in N^*\right)$．$T_n=a_1a_2\cdots a_n=\dfrac{2}{n+2}$，

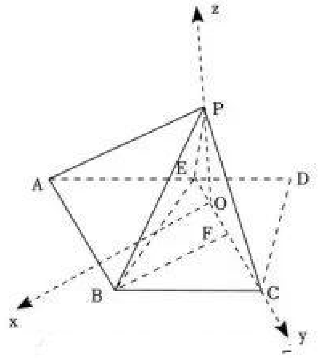
$\therefore T_n^2=\dfrac{4}{(n+2)^2}>\dfrac{4}{(n+2)(n+3)}=4\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)$，　…………8分

$\therefore S_n=T_1^2+T_2^2+\cdots T_n^2>4\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)$，

即 $S_n>4(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+3})$．　…………12分

18. 解：(1) 因为 $BC/\!/AD$，$\angle ADC=90^\circ$，$AB=BC=2DE$，所以平面四边形 $ABCD$ 为直角梯形．
设 $AB=BC=2DE=4a$，因为 $\angle ABC=120^\circ$．所以在 Rt$\triangle CDE$ 中，

$$CD=2\sqrt{3}a,EC=4a,\tan\angle ECD=\frac{DE}{DC}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$



所以 $\angle ECD=30^\circ$，又 $\angle ADC=\angle BCD=90^\circ$．
所以 $\angle BCE=60^\circ$，由 $EC=BC=AB=4a$，所以 $\triangle BCE$ 为等边三角形．
又 F 是 EC 的中点，所以 $BF\perp EC$，又 $BF\perp PC$，EC，$PC\subset$平面 PEC，
$EC\cap PC=C$，所以 $BF\perp$平面 PEC，而 $BF\subset$平面 $ABCE$，
故平面 $PEC\perp$平面 $ABCE$．　…………6分

（2）在直角三角形 PEC 中，$PE=DE=PF=\frac{1}{2}EC=2a$，取 EF 中点 O，所以 $PO\perp EF$.

由（1）可知平面 $PEC\perp$ 平面 $ABCE$，平面 $PEC\cap$ 平面 $ABCE=EC$.

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCE$，以 O 为原点，$\overline{OC}$ 方向为 y 轴建立如图所示的空间直角坐标系． ....8 分

则 $P(0,0,\sqrt{3}a)$，$A(2\sqrt{3}a,-3a,0)$，$B(2\sqrt{3}a,a,0)$，$C(0,3a,0)$，

所以 $\overline{PA}=(2\sqrt{3}a,-3a,-\sqrt{3}a),\overline{PB}=(2\sqrt{3}a,a,-\sqrt{3}a),\overline{PC}=(0,3a,-\sqrt{3}a)$，

设平面 PAB 的法向量 $\overline{m}=(x,y,z)$，$\therefore\begin{cases}\overline{m}\cdot\overline{PA}=0\\ \overline{m}\cdot\overline{PB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2\sqrt{3}ax-3ay-\sqrt{3}az=0\\ 2\sqrt{3}ax+ay-\sqrt{3}az=0\end{cases}$，

令 $x=1$ 得 $\overline{m}=(1,0,2)$．设直线 PC 与平面 PAB 所成角为θ，

则 $\sin\theta=\frac{|\overline{m}\cdot\overline{PC}|}{|\overline{m}||\overline{PC}|}=\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{(3a)^2+(-\sqrt{3}a)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以直线 PC 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$． ....12 分

19. 解：(1) X 可能取值为 0，1，2，3，4，记甲答对某道题的概率为事件 A，则 $P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

则 $X\sim B\left(4,\frac{2}{3}\right)$，$P(X=K)=C_4^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$ $(k=0,1,2,3,4)$，

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

则 $E(X)=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ ....6 分

（2）记事件 A_i 为“甲答对了 i 道题”，事件 B_i 为“乙答对了 i 道题”，其中甲答对某道题的概率为

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p=\frac{1}{2}(1+p)$，答错某道题的概率为 $1-\frac{1}{2}(1+p)=\frac{1}{2}(1-p)$，

则 $P(A_1)=C_2^1\cdot\frac{1}{2}(1+p)\cdot\frac{1}{2}(1-p)=\frac{1}{2}(1-p^2)$，$P(A_2)=[\frac{1}{2}(1+p)]^2=\frac{1}{4}(1+p)^2$，

$P(B_0)=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$，$P(B_1)=C_2^1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$，

所以甲答对题数比乙多的概率为：

$P(A_1B_0\cup A_2B_0\cup A_2B_1)=P(A_1B_0)+P(A_2B_0)+P(A_2B_1)$

$=\frac{1}{2}(1-p^2)\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}(1+p)^2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}(1+p)^2\cdot\frac{3}{8}=\frac{5}{64}p^2+\frac{7}{32}p+\frac{9}{64}\geq\frac{3}{16}$，解得 $\frac{1}{5}\leq p\leq1$，

甲的亲友团助力的概率 P 的最小值为 $\frac{1}{5}$. 来源：高三答案公众号 .... 12 分

20. 解：（1）设 $N(4,y_0)$，代入 $x^2=2py$，得 $y_0=\frac{8}{p}$，

所以 $|MN|=\frac{8}{p}$，$|NF|=\frac{p}{2}+y_0=\frac{p}{2}+\frac{8}{p}$. 由题设得 $\frac{p}{2}+\frac{8}{p}=\frac{5}{4}\times\frac{8}{p}$，

解得 $p=-2$（舍去）或 $p=2$，$\therefore C$ 的方程为 $x^2=4y$. ....4 分

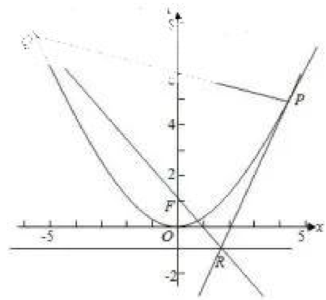
（2）由题知直线 l 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+6$，

由 $\begin{cases} y=kx+6 \\ x^2=4y \end{cases}$ 消去 y 整理得 $x^2-4kx-24=0$，

显然 $\Delta=16k^2+96>0$. 设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），则 $\begin{cases} x_1+x_2=4k \\ x_1\cdot x_2=-24 \end{cases}$，

抛物线在点 $P(x_1,\frac{x_1^2}{4})$ 处的切线方程为 $y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，

令 $y=-1$，得 $x=\frac{x_1^2-4}{2x_1}$，可得点 $R(\frac{x_1^2-4}{2x_1},-1)$. ....7 分



由 Q，F，R 三点共线得 $k_{QF}=k_{FR}$，所以 $\frac{\frac{x_2^2}{4}-1}{x_2}=\frac{-1-1}{\frac{x_1^2-4}{2x_1}}$，

即 $(x_1^2-4)(x_2^2-4)+16x_1x_2=0$，

整理得 $(x_1x_2)^2-4[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+16+16x_1x_2=0$，

所以 $(-24)^2-4[(4k)^2-2\times(-24)]+16+16\times(-24)=0$，解得 $k^2=\frac{1}{4}$，即 $k=\pm\frac{1}{2}$，

故所求直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+6$ 或 $y=-\frac{1}{2}x+6$. ....12 分

21. 解：（1）当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f'(x)=-\sin x+x$，设 $g(x)=f'(x)$，则

$g'(x)=-\cos x+1\geqslant 0$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上恒成立，$\therefore g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，又 $g(0)=0$，..............2 分

$\therefore$ 当 $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$ 时， $f'(x)<0$ ，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时， $f'(x)>0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递减，在 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增， $\because f(0)=1, f(-\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{8}$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,\frac{\pi^2}{8}]$ ....4 分

（2） $\because f(-x)=\cos(-x)-a(-x)^2=\cos x-ax^2=f(x)$ ， $\therefore f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上为偶函数，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点等价于函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点，

设 $h(x)=f'(x)=-\sin x-2ax$ ，则 $h'(x)=-\cos x-2a$ ，

①当 $a\ge 0$ 时， $h'(x)\le 0$ ，则 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减， $h(x)\le h(0)=0$ ，则 $f'(x)\le 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，无极小值；

②当 $a\le -\frac{1}{2}$ 时， $h'(x)\ge 0$ ，则 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

$h(x)\ge h(0)=0$ ，则 $f'(x)\ge 0$ ， $\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，无极小值； ....6 分

③当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$ ，使得 $h'(x_0)=0$ ，且当 $x\in(0,x_0)$ 时， $h'(x)<0$ ，当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$h'(x)>0$ ， $\therefore h(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上单调递减，在 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

$\because h(0)=0$ ， $\therefore h(x_0)<0$ ，又 $h(\frac{\pi}{2})=-1-a\pi$ ，

(i) 当 $-1-a\pi\le 0$ ，即 $-\frac{1}{\pi}\le a<0$ 时， $h\left(\frac{\pi}{2}\right)\le 0$ ，

$f'(x)\le 0$ ，此时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，无极小值；

(ii) 当 $-1-a\pi>0$ ，即 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{\pi}$ 时， $h(\frac{\pi}{2})>0$ ，则存在 $t\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ ，使得 $h(t)=-\sin t-2at=0(*)$ ，

且当 $x\in(0,t)$ 时， $h'(x)<0$ ，当 $x\in(t,\frac{\pi}{2})$ 时， $h'(x)>0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,t)$ 上单调递减，在 $(t,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点 $x_2=t$ ，此时 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，

$\therefore$ 当函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点时 a 的取值范围为 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\pi})$； ....9 分

$\because x_1+x_2=0$ ，若 $f(x_2-x_1)=1+\frac{1}{9}(x_2-x_1)^2$ ，则 $\cos 2x_2-4ax_2^{\,2}=1+\frac{4}{9}x_2^{\,2}$ ，

由 (*) 知， $\sin x_2=-2ax_2$ ， $\therefore 1-8a^2x_2^{\,2}-4ax_2^{\,2}=1+\frac{4}{9}x_2^{\,2}$ ，

整理可得 $x_2^{\,2}(3a+1)(6a+1)=0$ ，又 $x_2\ne 0, a\in(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\pi})$ ， $\therefore a=-\frac{1}{3}$ ，

$\therefore$ 存在 $a=-\frac{1}{3}$，使得 $f(x_2-x_1)=1+\frac{1}{9}(x_2-x_1)^2$ 成立. 来源：高三答案公众号 ....12 分

22.（1）$\because$ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\y=1+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），消去参数 α 可得：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$， ....2 分

又 $\because$ 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\theta-\sqrt{3}\rho\cos\theta+1=0$，且 $\rho\sin\theta=y,\rho\cos\theta=x$，

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $y-\sqrt{3}x+1=0$,

综上所述：曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$；直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x-y-1=0$.

....5 分

（2）由（1）可知：直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x-y-1=0$，即直线过点 $P(0,-1)$，斜率为 $\sqrt{3}$，倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，则可设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\y=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

将 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\y=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ 代入 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 整理得：$t^2-\left(2\sqrt{3}+1\right)t+4=0$，

设点 M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2，判别式 $\Delta>0$ 恒成立，

可得：$t_1+t_2=2\sqrt{3}+1>0,t_1\cdot t_2=4>0$，即 $t_1>0,t_2>0$，

$\therefore |PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=t_1+t_2=2\sqrt{3}+1$ . ...10 分

23. （1）因为 a,b,c 为正数，且 $a+b+c=3$.

据柯西不等式 $(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)\geqslant(a\times1+b\times1+c\times1)^2=9$，

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant3$，当且仅当 $a=b=c=1$ 时，等号成立. ....5 分

（2）据柯西不等式 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant\left(\sqrt{\frac{1}{a}\cdot a}+\sqrt{\frac{1}{b}\cdot b}+\sqrt{\frac{1}{c}\cdot c}\right)^2=9$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant3$，

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，等号成立.

所以 $m\leq3$ 故 m 的最大值为 3 ....10 分

（注：23 题亦可利用基本不等式证明.）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。