

运城市 2023 年高三第三次模拟调研测试

数学 B 卷参考答案及评分细则

1. 【答案】B

【解析】由题得 $A = \{x | 0 < x < 2\}$, $B = \{x | x \leq 1\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 < x \leq 1\}$, 故选 B.

2. 【答案】A

【解析】因为 $z = \frac{2i}{1-i} + 2i = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 2i = i - 1 + 2i = -1 + 3i$, 所以 z 的虚部为 3, 故选 A.

3. 【答案】B

【解析】由题易知双曲线 $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$, 其他三个选项中的双曲线的渐近线方程均为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 故选 B.

4. 【答案】D

【解析】由题得 $b = (1, -3) - 2(1, \lambda) = (-1, -3 - 2\lambda)$, 因为 $a \perp b$, 所以 $a \cdot b = -1 \times 1 - (3 + 2\lambda)\lambda = 0$, 解得 $\lambda = -1$ 或 $-\frac{1}{2}$, 故选 D.

5. 【答案】B

【解析】因为 $f(x+3) = -f(x)$, 所以 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 6, 又 $g(x) = f(x) - 2$ 为奇函数, 所以 $f(x) - 2 + f(-x) - 2 = 0$, 所以 $f(x) + f(-x) = 4$, 令 $x = 0$, 得 $2f(0) = 4$, 所以 $f(0) = 2$. 所以 $f(198) = f(0 + 6 \times 33) = f(0) = 2$, 故选 B.

6. 【答案】C

【解析】由 $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$ 得 $\cos 37^\circ \approx \frac{4}{5}$, 所以 $\frac{\sqrt{2} \sin 8^\circ + \cos 53^\circ}{\sqrt{2} \cos 8^\circ - \sin 53^\circ} = \frac{\sin(53^\circ - 45^\circ) + \cos 53^\circ \sin 45^\circ}{\cos(53^\circ - 45^\circ) - \sin 53^\circ \sin 45^\circ} = \frac{\sin 53^\circ \cos 45^\circ}{\cos 53^\circ \cos 45^\circ} = \frac{\cos 37^\circ}{\sin 37^\circ} \approx \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$, 故选 C.

7. 【答案】D

【解析】不妨设 AB, BC, AC 分别为 c, a, b , 则 $2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_c^2 \cdot c$, 故 $\frac{3c}{2\pi} = S_{\triangle ABC}^2$, 同理可得 $\frac{2a}{\pi} = S_{\triangle ABC}^2$, $\frac{3b}{\pi} = S_{\triangle ABC}^2$, 故 $a : b : c = 3 : 2 : 4$, 则 $\cos \angle BAC = \frac{2^2 + 4^2 - 3^2}{2 \times 2 \times 4} = \frac{11}{16}$, 故选 D.

8. 【答案】C

【解析】令 $f(x) = \frac{\ln x}{2} + 1 - \sqrt{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{2x}$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $f(3.5) < f(1) = 0$, 即 $\frac{\ln 3.5}{2} + 1 = \frac{\ln(3.5e^2)}{2} < \sqrt{3.5} = \frac{\sqrt{14}}{2}$, 即 $b < c$; 令 $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - x - 1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, 故函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 故 $g(0.7) > g(0) = 0$, 即 $e^{0.7} > 1 + 0.7 + \frac{0.7^2}{2} = 1.945 > \sqrt{3.5} = \frac{\sqrt{14}}{2}$, 故 $a > c$, 则 $a > c > b$, 故选 C.

9. 【答案】BD

【解析】在 $N(\mu, \sigma^2)$ 中, μ 为平均数, B 正确; 正态曲线关于直线 $X = \mu$ 对称, D 正确; $\sigma^2 = 16$ 为方差, A 错误; 从该校高二男生中任选一人, 身高超过 183 cm 的概率 $P = \frac{1 - 0.9544}{2} < 0.03$, C 错误, 故选 BD.

10. 【答案】BC

【解析】 $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 12 = 2(e^x - 3)(e^x + 2)$, 故 $f'(0) = -12$, 故 A 错误; 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > \ln 3$, 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln 3, +\infty)$, 而 $(2, +\infty) \subseteq (\ln 3, +\infty)$, 故 B 正确; 当 $x < \ln 3$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > \ln 3$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故 $f(x)$ 的极小值为 $f(\ln 3) = 3 - 12\ln 3$, 故 C 正确; $f(x)$ 在 $[-2, 1]$ 上单调递减, 最小值为 $f(1) = e^2 - 2e - 12$, 故 D 错误, 故选 BC.

11. 【答案】BD

【解析】因为点 $P(m, n)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上, 所以 $\frac{m^2}{3} + \frac{n^2}{2} = 1$ ($-\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$), $n^2 = 2 - \frac{2}{3}m^2$, 所以 $|PQ| = \sqrt{(m-a)^2 + n^2} = \sqrt{(m-a)^2 + 2 - \frac{2}{3}m^2} = \sqrt{\frac{1}{3}m^2 - 2am + a^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{3}(m-3a)^2 + 2 - 2a^2}$, 若 $0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当 $m = 3a$ 时, $|PQ|$ 最小, 若 $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当 $m = \sqrt{3}$ 时, $|PQ|$ 最小, 故选 BD.

12. 【答案】AB

【解析】由 $f(x) = f\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$, 知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 对称, 又 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0$, 即 $\frac{5\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的零点, 则 $\frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = (2n+1) \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{\omega}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, 从而 $\omega = 2n+1$ ($n \in \mathbf{Z}$). 根据 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}\right)$ 上单调, 有 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{6}$, 可得 $\omega \leq 6$, 所以 $\omega = 1, 3, 5$. 当 $\omega = 5$ 时, 由 $5 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 得 $\varphi = k\pi - \frac{25\pi}{12}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{12}$, 此时当 $x \in \left(\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}\right)$ 时, $5x - \frac{\pi}{12} \in \left(\frac{7\pi}{36}, \frac{37\pi}{36}\right)$, 所以 $f(x) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{12}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}\right)$ 上不单调, $\omega = 5$ 不符合题意; 当 $\omega = 3$ 时, 由 $3 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 得 $\varphi = k\pi - \frac{5\pi}{4}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 此时当 $x \in \left(\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}\right)$ 时, $3x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$, 所以 $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}\right)$ 上单调, $\omega = 3$ 符合题意; 当 $\omega = 1$ 时, 由 $\frac{5\pi}{12} + \varphi = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 得 $\varphi = k\pi - \frac{5\pi}{12}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{5\pi}{12}$, 此时当 $x \in \left(\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}\right)$ 时, $x - \frac{5\pi}{12} \in \left(-\frac{13\pi}{36}, -\frac{7\pi}{36}\right)$, 所以 $f(x) = \sin\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}\right)$ 上单调, $\omega = 1$ 符合题意. 从而 ω 的可能取值为 1, 3, 故选 AB.

13. 【答案】 $[1, +\infty)$

【解析】因为 $|x_0| + 1 \geq 1$, 所以实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

14. 【答案】4

【解析】由题意可得圆 C 的圆心 $C(1, -2)$, 半径 $r = \sqrt{5-m}$, 则 C 到直线 l 的距离 $d = \frac{|2 \times 1 - (-2) - 2|}{\sqrt{5}} =$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 因为直线 l 被圆 C 截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $2\sqrt{5-m} - \frac{4}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 解得 $m = 4$.

15. 【答案】 $\frac{1}{3}$

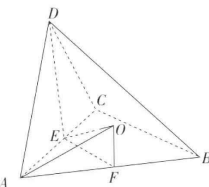
【解析】甲、乙分配到同一个场馆有以下两种情况: (1) 场馆分组人数为 1, 1, 3 时, 甲、乙必在 3 人组, 则方法数为 $C_3^1 A_3^3 = 18$ 种; (2) 场馆分组人数为 2, 2, 1 时, 其中甲、乙在一组, 则方法数为 $C_3^1 C_2^1 A_2^2 = 18$ 种, 即甲、乙分配到同一个场馆的方法数为 $n = 18 + 18 = 36$. 若甲分配到游泳馆, 则乙必然也在游泳馆, 此时的方法数为 $m = C_3^1 A_2^2 + C_3^1 A_2^2 = 12$, 故所求的概率为 $P = \frac{m}{n} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

16. 【答案】 10π

【解析】如图, 取 AC 的中点 E , AB 的中点 F , 连接 EF, DE . 因为 $AD = CD$, 所以 $DE \perp AC$, 因为 $BC \perp AC, EF \parallel BC$,

数学 第2页(共6页)

所以 $EF \perp AC$, 所以 $\angle DEF = 135^\circ$. 过点 E 作 $OE \perp$ 平面 DAC , 过点 F 作 $OF \perp$ 平面 ABC , $OE \cap OF = O$, 因为点 E, F 分别是 $\triangle DAC$ 和 $\triangle ABC$ 的外心, 所以点 O 是三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心. 因为 $AD = \sqrt{3}$, 所以 $AC = \sqrt{6}, BC = \sqrt{2}, AB = 2\sqrt{2}$, 所以 $EF = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle OEF = 45^\circ$, 所以 $OF = EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AF = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$, 所以 $OA = \sqrt{OF^2 + AF^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$. 则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的半径 $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$, 所以外接球的表



面积 $S = 4\pi R^2 = 10\pi$.

【评分细则】

1. 第 13 小题中, 若结果不用区间表示, 则不给分;

2. 第 15 小题中, 若结果写成 $\frac{12}{36}$, 而未约分, 则不给分.

17. 解: (1) 当 $n=1$ 时, $2S_1 = 3^1 - 2 - 1$, 解得 $a_1 = 0$; (2 分)

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3^n - 2n - 1}{2} - \frac{3^{n-1} - 2n + 1}{2} = 3^{n-1} - 1$, (4 分)

将 $n=1$ 代入 $a_1 = 0$ 也成立,

综上所述, $a_n = 3^{n-1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$. (5 分)

(2) 依题意, $b_n = \frac{2 \cdot 3^n}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{2 \cdot 3^n}{(3^n - 1)(3^{n+1} - 1)} = \frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1}$. (8 分)

故 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{3^1 - 1} - \frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} - \frac{1}{3^3 - 1} + \cdots + \frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^{n+1} - 1}$. (10 分)

【评分细则】

1. 第(1)问中, 没有考虑 $n=1$ 的情况扣 2 分, $n=1$ 求错, $n \geq 2$ 求对, 也扣 2 分; 没有综上所述扣 1 分; 通过归纳的方法得到通项公式给 2 分;

2. 第(2)问中, 仅结果错误, 但过程均正确扣 2 分; 通过归纳的方法得到 T_n 给 2 分.

18. 解: (1) $y = a \cdot b^x$ 两边同时取自然对数得 $\ln y = \ln(a \cdot b^x) = \ln a + x \ln b$.

设 $\ln y = v$, 所以 $v = \ln a + x \ln b$. (2 分)

因为 $\bar{x} = 3, \bar{v} = 1.94, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55$,

所以 $\ln \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i - 5 \bar{x} \bar{v}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{33.82 - 5 \times 3 \times 1.94}{55 - 5 \times 3^2} = 0.472$. (4 分)

把 $(3, 1.94)$ 代入 $\bar{v} = \ln \hat{a} + \bar{x} \ln \hat{b}$, 得 $\ln \hat{a} = 0.524$. (6 分)

所以 $\hat{v} = 0.524 + 0.472x$, 即 $\ln \hat{y} = 0.524 + 0.472x$. (7 分)

所以 $\hat{y} = e^{0.524 + 0.472x} = 1.7 \times 1.6^x$,

即 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 1.7 \times 1.6^x$. (9 分)

(2) 由(1)知 $b - 1.3 = 0.3$. (10 分)

所以根据 2022 年中国车载音乐市场规模及修正后的年平均增长率预测 2024 年中国车载音乐市场规模为 $17.0 \times 1.3^2 = 17.0 \times 1.69 = 28.73$ 十亿元. (12 分)

【评分细则】

所得数据非常接近可酌情给分.

19. 解: (1) 若选①, 由已知得 $3a \sin C = 4b \cos A$, (2 分)

所以 $3a \sin C = 4c \cos A$,

由正弦定理得 $3\sin A \sin C = 4\sin C \cos A$,

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C > 0$,

所以 $3\sin A = 4\cos A$, ①(5分)

又 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, ②

联立①、②以及 $A \in (0, \pi)$, 解得 $\sin A = \frac{4}{5}$. (6分)

若选②, 由已知及正弦定理得 $3\sin A \sin B + 4\sin A \cos B = 4\sin C$, (2分)

所以 $3\sin A \sin B + 4\sin A \cos B = 4\sin(A+B)$, (3分)

所以 $3\sin A \sin B + 4\sin A \cos B = 4\sin A \cos B + 4\cos A \sin B$,

所以 $3\sin A \sin B = 4\cos A \sin B$,

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B > 0$, 所以 $3\sin A = 4\cos A$, ①(5分)

又 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, ②

联立①、②以及 $A \in (0, \pi)$, 解得 $\sin A = \frac{4}{5}$. (6分)

(2) 由 $\triangle ABC$ 的面积为 2, 得 $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{2}{5}bc = 2$, 所以 $bc = 5$, (7分)

由(1)可得 $\cos A = \frac{3}{4}\sin A = \frac{3}{5}$, (8分)

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - 16}{10} = \frac{3}{5}$, (10分)

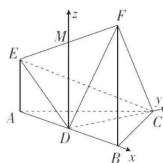
所以 $b^2 + c^2 = 22$,

所以 $b + c = \sqrt{b^2 + 2bc + c^2} = 4\sqrt{2}$, (11分)

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 4 + 4\sqrt{2}$. (12分)

【评分细则】

- 第(1)小题中, 若选①, 正弦定理写对了可得 2 分; 若未注明“又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C > 0$,”以及“ $A \in (0, \pi)$,”不扣分;
 - 第(1)小题中, 若选②, 未注明“又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B > 0$,”以及“ $A \in (0, \pi)$,”不扣分;
 - 第(2)小题中, 用其他方法解出 b, c 的值, 结果正确步骤无误可给满分.
20. (1) 证明: 因为 $AC = BC$, D 为 AB 的中点, 所以 $CD \perp AB$,
又 $AE \perp$ 平面 ABC , $CD \subset$ 平面 ABC , 所以 $AE \perp CD$, (1分)
又 $AE \cap AB = A$, $AE, AB \subset$ 平面 $ABFE$, 所以 $CD \perp$ 平面 $ABFE$,
又 $DE \subset$ 平面 $ABFE$, 所以 $CD \perp DE$. (3分)
由平面几何知识可知 $DF = 2\sqrt{5}$, $DE = \sqrt{5}$, $EF = 5$,
所以 $DE^2 + DF^2 = EF^2$, 所以 $DE \perp DF$,
又 $CD \cap DF = D$, $CD, DF \subset$ 平面 CDF , 所以 $DE \perp$ 平面 CDF . (5分)
- (2) 解: 由题知 $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 2$, 过 D 作 $DM \parallel AE$ 交 EF 于 M ,
则 $DM \perp$ 平面 ABC , 可得 $DM \perp AB$, $DM \perp CD$,
以 D 为坐标原点, 向量 $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DM}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系, (7分)



数学 第4页(共6页)

则 $C(0,2,0), E(-2,0,1), F(2,0,4)$, 所以 $\overrightarrow{CE} = (-2, -2, 1), \overrightarrow{CF} = (2, -2, 4)$,
设平面 CEF 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{由} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CE} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CF} = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -2x - 2y + z = 0, \\ 2x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$$

取 $x = -3$, 则 $y = 5, z = 4$, 所以 $\mathbf{m} = (-3, 5, 4)$. (9 分)

由(1)知平面 CDF 的一个法向量为 $\overrightarrow{DE} = (-2, 0, 1)$. (10 分)

设二面角 $E-CF-D$ 的平面角为 θ , 易知 θ 为锐角,

$$\text{则} \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{DE} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DE}|}{|\mathbf{m}| |\overrightarrow{DE}|} = \frac{|-3 \times (-2) + 5 \times 0 + 4 \times 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 4^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

所以二面角 $E-CF-D$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. (12 分)

【评分细则】

- 第(1)小题中,用其他方法(如向量法)证明,酌情给分;
 - 第(2)小题中,平面 CDF 的法向量不唯一,只要与 $\mathbf{m} = (-3, 5, 4)$ 平行即可得分;
 - 第(2)小题中,若不用空间向量法求解,酌情给分,结果正确步骤无误则给满分.
21. 解:(1)由对称性可知当 $\triangle OAB$ 为等边三角形时, A, B 两点关于 x 轴对称,

当 $\triangle OAB$ 为等边三角形时, $\triangle OAB$ 的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2} |AB| = 12$,

由题意知点 $(12, 4\sqrt{3})$ 在 C 上, 代入 $y^2 = 2px$, 得 $(4\sqrt{3})^2 = 24p$,

解得 $p = 2$. (3 分)

所以 C 的标准方程为 $y^2 = 4x$. (4 分)

(2)由(1)知 $F(1, 0)$, 根据题意可知直线 AB 的斜率不为 0,

设直线 AB 的方程为 $x = ky + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = ky + m, \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{得} y^2 - 4ky - 4m = 0,$$

所以 $\Delta = 16k^2 + 16m > 0$, 即 $k^2 + m > 0$, 且 $y_1 + y_2 = 4k, y_1 y_2 = -4m$,

所以 $x_1 + x_2 = k(y_1 + y_2) + 2m = 4k^2 + 2m$. (7 分)

由 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 4\overrightarrow{PF}$, 得 $(x_1 - x_0, y_1 - y_0) + (x_2 - x_0, y_2 - y_0) = 4(1 - x_0, -y_0)$,

$$\text{所以} \begin{cases} x_1 + x_2 - 4 = -2x_0, \\ y_1 + y_2 = -2y_0, \end{cases} \text{所以} \begin{cases} x_0 = 2 - m - 2k^2, \\ y_0 = -2k, \end{cases} \text{即} P(2 - m - 2k^2, -2k), (8 \text{ 分})$$

又点 P 在 C 上, 所以 $4k^2 = 4(2 - m - 2k^2)$, 即 $3k^2 + m = 2$, ①

所以 $k^2 + m = k^2 + 2 - 3k^2 = 2(1 - k^2) > 0$, 解得 $-1 < k < 1$,

又点 P 在第一象限, 所以 $-2k > 0$, 所以 $-1 < k < 0$. (9 分)

又点 P 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|2 - m - 2k^2 + 2k^2 - m|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{2|m - 1|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2$, 化简得 $m^2 - 2m = k^2$, ② (10 分)

$$\text{联立} \begin{cases} m = -\frac{1}{3}, \\ k = -\frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases} \text{或} \begin{cases} m = -\frac{1}{3}, \\ k = \frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases} \text{(舍去)} \text{或} \begin{cases} m = 2, \\ k = 0 \end{cases} \text{(舍去)}.$$

此时点 $P\left(\frac{7}{9}, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$, 直线 AB 的方程为 $3x + \sqrt{7}y + 1 = 0$. (12 分)

数学 第 5 页(共 6 页)

【评分细则】

- 第(1)小题中,求对了 $\triangle OAB$ 的高可给1分;
- 第(2)小题中,写出了韦达定理可给1分;
- 第(2)小题中,最后结果点 P 和直线方程只写对一个扣1分;
- 第(2)小题中,答案倒数第2行解对了方程组,若未舍去或只舍弃一组不合题意的解扣1分.

22. 解:(1)令 $f(x)=0$,故 $xe^x=a$,令 $m(x)=xe^x$,

则 $m(x)$ 的图象与 $y=a$ 的交点个数即为 $f(x)$ 的零点个数,

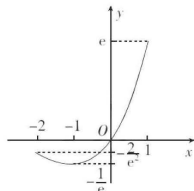
$m'(x)=(x+1)e^x$,则当 $x \in [-2, -1]$ 时, $m'(x) < 0$,当 $x \in (-1, 1]$ 时, $m'(x) > 0$,

故函数 $m(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递减,在 $(-1, 1]$ 上单调递增;(2分)

而 $m(-2)=-\frac{2}{e^2}$, $m(1)=e$, $m(-1)=-\frac{1}{e}$,作出函数 $m(x)$ 在 $[-2, 1]$ 上的大致图象如下所示,(4分)

观察可知,当 $a < -\frac{1}{e}$ 或 $a > e$ 时,函数 $f(x)$ 无零点;当 $a = -\frac{1}{e}$ 或 $-\frac{2}{e^2} < a \leq e$ 时,函数 $f(x)$ 有1个零点;当 $-\frac{1}{e}$

$< a \leq -\frac{2}{e^2}$ 时,函数 $f(x)$ 有2个零点.(6分)



(2)结论: $M(x) > 1$. (7分)

下面给出证明:

依题意, $M(x) = \left[\frac{f(x)}{x} - 1 \right] \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \frac{(e^x - 1) \cdot \ln(x+1)}{x^2}$, (8分)

令 $g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $x \neq 0$, 则 $g'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$, $x \neq 0$, (9分)

令 $h(x) = (1-x)e^x - 1$, 则 $h'(x) = -xe^x$,

当 $x < 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;当 $x > 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

所以 $h(x) \leq h(0) = 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立;

从而 $g'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - 1)^2} < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减, (10分)

易知当 $-1 < x < 0$ 时, $0 > x > \ln(x+1)$;当 $x > 0$ 时, $x > \ln(x+1) > 0$,

所以 $g(x) < g(\ln(x+1))$, 即 $\frac{x}{e^x - 1} < \frac{\ln(x+1)}{e^{\ln(x+1)} - 1} = \frac{\ln(x+1)}{x}$, (11分)

又当 $x > -1$ 且 $x \neq 0$ 时, $x(e^x - 1) > 0$, 所以 $\frac{(e^x - 1) \cdot \ln(x+1)}{x^2} > 1$, 即 $M(x) > 1$. (12分)

【评分细则】

本题解法不唯一,其他解法正确可酌情给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线