2023年抚顺市普通高中应届毕业生高考模拟考试

数学参考答案与评分标准

一、选择题（每小题5分，共40分）

C A B D B C D C

二、多项选择题（每小题5分，共20分）

AC ACD BD ABC

三、填空题（每小题5分，共20分）

13．448；14．12；15．$\dfrac{24}{25}$；16．$\log_c a$．

四、解答题

17．解：（1）因为$\overrightarrow{CD}=\lambda(\dfrac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}+\dfrac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|})\ (\lambda>0)$，所以$CD$为$\angle ACB$的平分线 ……2分

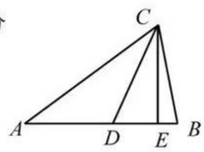
又ΔCAD的面积与ΔCBD面积的比为$2\sqrt{6}:3$， 所以$\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

因此由正弦定理得$\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，且$B>A$ ……4分 由$\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$得

$\cos B=2\cos^2\dfrac{B}{2}-1=\dfrac{1}{3}$，从而$\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$且$B$为锐角，所以$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……5分

（2）由（1）知A为锐角，且$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ……6分

因此$\cos C=-\cos(A+B)=-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ ……7分



又$AC=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}BC$，所以在$\Delta ABC$中由余弦定理得

$BC^2+(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}BC)^2-2BC\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}BC\times\dfrac{\sqrt{6}}{9}=5^2$，解得$BC=3$ ……9分

于是$CE=BC\sin B=3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$ ……10分

18.解：（1）因为$S_2+T_2=S_3+T_3=S_4+T_4$，所以$\begin{cases}S_3-S_2+T_3-T_2=0\\S_4-S_3+T_4-T_3=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}a_3+b_3=0\\a_4+b_4=0\end{cases}$ ……2分 即$\begin{cases}2d+q^2=0\\3d+q^3=0\end{cases}$，因为$q\neq0$，解得$q=\dfrac{3}{2}$，$d=-\dfrac{9}{8}$ ……4分

所以$a_n=-\dfrac{9}{8}(n-1)$，$b_n=(\dfrac{3}{2})^{n-1}$ ……6分

（2）由（1）知 $|a_n|=\frac{9}{8}(n-1)$ ……7 分

得 $\sum_{i=1}^{n}|a_{2i}|=\frac{9}{8}[1+3+5+\cdots+(2n-1)]=\frac{9}{8}\times\frac{n(1+2n-1)}{2}=\frac{9}{8}n^2$，所以 $c_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{2i}|=\frac{9}{8}n$ ……9 分

因此 $\frac{1}{c_nc_{n+1}}=\frac{64}{81n(n+1)}$，所以 $P_n=\frac{64}{81}\times[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]$

$=\frac{64}{81}\times(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{64n}{81(n+1)}$ ……12 分

19．解（1）由频率折线图可得 $m=1-0.04-0.20-0.24-0.16=0.36$ ……1 分

由频数折线图可知女生共有 $1+4+5+12+3=25$ 人，其中“体育迷”有 $12+3=15$ 人，

故男生共有 $100-25=75$ 人，其中“体育迷”有 $75\times(0.24+0.16)=30$ 人 ……3 分

因此估计该校高一学生中“体育迷”所占比例约为 $\frac{15+30}{100}=45\%$ ……4 分

（2）

	体育迷	非体育迷	合计
男	30	45	75
女	15	10	25
合计	45	55	100

……5 分

因为 $K^2=\frac{100(30\times10-15\times45)^2}{45\times55\times75\times25}\approx3.030$，而 $3.030<3.841$，故没有 95%的把握认为是否为“体育迷”与性别有关 ……8 分

（3）由频率折线图可知男生的锻炼时间在每组的频数分别为 $75\times0.04=3$，$75\times0.20=15$，$75\times0.36=27$，$75\times0.24=18$，$75\times0.16=12$；故这 100 名学生每周的锻炼时间在每组的频率分别为（1+3）÷100=0.04，（4+15）÷100=0.19，（5+27）÷100=0.32，（12+18）÷100=0.30，（3+12）÷100=0.15 ……10 分

所以估计该校高一年级学生的周平均锻炼时间为：

$1\times0.04+3\times0.19+5\times0.32+7\times0.30+9\times0.15=5.66$，因为 $5.66>5$，所以估计该校高一年级学生的周平均锻炼时间达到了保持身体良好健康发展的水平 ……12 分

20.（1）证明：连接 BD，设交点为 O，连接 BQ，在 ΔSCP 中，点 E 是 SC 的中点，点 Q 是线段 SP 的中点，所以 $QE\parallel PC$ ……1 分

在 ΔBQD 中，点 O 是线段 BD 的中点，点 P 是线段 DQ 的中点，所以 $QB\parallel OP$ ……2 分

又因为 $BQ\cap EQ=Q$，$BQ,EQ\subset$ 平面 BEQ，$OP,CP\subset$ 平面 PAC，所以平面 $BEQ\parallel$ 平面 PAC，

又因为 $BE\subset$ 平面 BEQ，所以 $BE\parallel$ 平面 PAC ……4 分

（2）解：若选① $SD\perp$ 平面 PAC，连接 SO，因为 $ABCD$ 为正方形，所以点 O 分别为 AC 与 BD 的中点，由题意，$SB=SD$，所以 $SO\perp BD$，同理 $SO\perp AC$，且 $BD\cap AC=O$，所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$ ……6 分

以 O 为原点，OC,OD,OS 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系.

设 $OC=1$，则 $CD=\sqrt{2},SC=2$， $OS=\sqrt{3}$， $\angle SCO=60^\circ$，所以

$C(1,0,0),A(-1,0,0),D(0,1,0),B(0,-1,0),S(0,0,\sqrt{3})$， $\overrightarrow{SD}=(0,1,-\sqrt{3})$……8 分

因为 $SD\perp$ 平面 PAC，所以平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{SD}=(0,1,-\sqrt{3})$

平面 DAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$……10 分

设二面角 $P-AC-D$ 的平面角为 θ，所以 $\cos\theta=|\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_1|}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$……12 分

若选② P 为 SD 的中点，连接 SO，因为 $ABCD$ 为正方形，所以点 O 分别为 AC 与 BD 的中点，

由题意，$SB=SD$，所以 $SO\perp BD$，同理 $SO\perp AC$，且 $BD\cap AC=O$，所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$……6 分

以 O 为原点， OC,OD,OS 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系.

设 $OC=1$，则 $CD=\sqrt{2},SC=2$， $OS=\sqrt{3}$， $\angle SCO=60^\circ$，所以

$C(1,0,0),A(-1,0,0),D(0,1,0),B(0,-1,0),S(0,0,\sqrt{3})$， $P(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，则 $\overrightarrow{AP}=(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

$\overrightarrow{CP}=(-1,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$……8 分 设平面 APC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}$，解得平面

APC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,\sqrt{3},-1)$……10 分 平面 DAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，设二面

角 $P-AC-D$ 的平面角为 θ，所以 $\cos\theta=|\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_1|}|=\dfrac{1}{2}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$……12 分

21．解:（1）由已知得 $A(-a,0),B(a,0)$ 且 $k_{AD}\cdot k_{BD}=-\dfrac{3}{4}$，即 $\dfrac{y}{x-a}\cdot\dfrac{y}{x+a}=-\dfrac{3}{4}$，

因此有 $y^2=-\dfrac{3}{4}(x^2-a^2)=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$，得 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$……2 分 因此 $c^2=a^2-b^2=\dfrac{1}{4}a^2=1$，

得 $a^2=4$， $b^2=3$，所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……4 分

（2）显然直线 MN 经过 x 轴上的定点 Q（$\dfrac{3}{2}$，0），设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则由椭圆的对称性得 $S=2S_{\Delta MON}=2\times\dfrac{1}{2}|OQ|(|y_1|+|y_2|)=|OQ|(|y_1|+|y_2|)$……6 分

联立 $\begin{cases}2x+ty-3=0\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 x 得 $(16+3t^2)y^2-18ty-21=0$，

$\Delta=(-18t)^2+84(16+3t^2)>0$ 恒成立，所以 $y_1+y_2=\dfrac{18t}{16+3t^2},y_1y_2=-\dfrac{21}{16+3t^2}<0$……8 分

$$|y_1|+|y_2|=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{(18t)^2+84(16+3t^2)}{(16+3t^2)^2}}=8\sqrt{3}\sqrt{\frac{3t^2+7}{(16+3t^2)^2}},$$

令 $3t^2+7=m$，显然有 $m\geqslant 7$，于是

$$S=\frac{3}{2}\times 8\sqrt{3}\sqrt{\frac{m}{(m+9)^2}}=12\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{m+\frac{81}{m}+18}}\leqslant 2\sqrt{3}$$，当 $m=9$，即 $|t|=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时取等号.

因此 ΔMNE 的面积 S 的最大值为 $2\sqrt{3}$ ……12 分

22. （1）由已知得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{2}{x}+2(x+a)=2(\frac{1}{x}+x+a)=\frac{2(x^2+ax+1)}{x}\geqslant 2(2+a)$$ ……1 分

当 $a\geqslant -2$ 时，恒有 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数；

当 $a<-2$ 时，方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个不等的正根 $x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2},x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

由 $f'(x)>0$ 即 $x^2+ax+1>0$ 解得 $0<x<x_1$，或 $x>x_2$，由 $f'(x)<0$ 即 $x^2+ax+1<0$ 解得 $x_1<x<x_2$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递增，在 (x_1,x_2) 单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 单调递增……3 分

综上，当 $a\geqslant -2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数；当 $a<-2$ 时，

$f(x)$ 在 $(0,\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 单调递增，在 $(\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 单调递减，在 $(\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 单调递增……4 分

（2）由（1）知，当 $a<-2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递增，在 (x_1,x_2) 单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2},x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，且 x_1，x_2 满足

$x_1+x_2=-a>0,x_1x_2=1>0$，所以 $0<x_1<1<x_2$，$x_2+a=-x_1=-\frac{1}{x_2}$ ……6 分

$f(x_2)-x_1=2\ln x_2+(x_2+a)^2-x_1=2\ln x_2+\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_2}$，且 $x_2>1$；

令 $m(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}(x>1)$，则 $m'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2+x-2}{x^3}$，

当 $x>1$ 时，$m'(x)>0$，所以 $m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$m(x)>m(1)=0$，

于是 $f(x_2)-x_1>0$，即 $f(x_2)>x_1$……9 分

$f(x_2)-x_2=2\ln x_2+(x_2+a)^2-x_2=2\ln x_2+\frac{1}{x_2^2}-x_2$，且 $x_2>1$；

令 $g(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}-x(x>1)$，则 $g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}-1=\frac{-x^3+2x^2-2}{x^3}$，

令 $h(x)=-x^3+2x^2-2$，$h'(x)=-3x^2+4x=-x(3x-4)$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,\frac{4}{3})$ 单调递增，在 $(\frac{4}{3},+\infty)$ 单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(\frac{4}{3})=-\frac{22}{27}<0$，因此 $h(x)<0$，

即 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$g(x)<g(1)=0$，于是 $f(x_2)-x_2<0$，

$f(x_2)<x_2$.因此，$x_1<f(x_2)<x_2$……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。