沈阳二中 2022—2023 学年度下学期第五次模拟考试

高三（23 届）数学试题答案

1．DDBDA　6-8　ABC　9.BD　10.　ACD　11.ACD　12.BC

13．$\frac{1}{10}$　14．$\frac{9}{2}$　15．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　16.24

17．（1）因为$a_n \cdot a_{n+1}=2^n$，所以$a_{n+1}\cdot a_{n+2}=2^{n+1}$，$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$，

所以$\frac{a_{n+2}}{a_n}$为常数 2.　……5 分

（2）因为$a_1=2$，$a_n\cdot a_{n+1}=2^n$，所以$a_1a_2=2^1$，即$a_2=1$，又$\frac{a_{n+2}}{a_n}=2$，

∴数列$\{a_{2n-1}\}$是 2 为首项，2 为公比的等比数列；

数列$\{a_{2n}\}$是 1 为首项，2 为公比的等比数列；

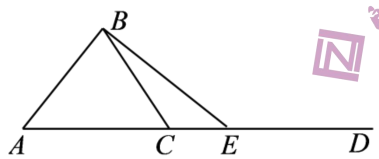
所以$T_{2n}=(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{2n})=\frac{2-2^{n+1}}{1-2}+\frac{1-2^n}{1-2}=3\cdot 2^n-3$.　……10 分

18.（1）在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle BCA}$，

即$\frac{12-4\sqrt{3}}{\sin(180°-45°-75°)}=\frac{AB}{\sin 75°}$，$AB=\frac{(12-4\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{2}$

故 1 号机器人和 2 号机器人之间的距离为$4\sqrt{2}$米　……6 分

（2）如图，



设$BE=x$米.由题意，$ED=2x$米.$AE=AD-ED=(17-2x)$米

在$\triangle ABE$中，由余弦定理得$BE^2=AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cos A$，

$x^2=(4\sqrt{2})^2+(17-2x)^2-2\times4\sqrt{2}(17-2x)\cos45°$

整理得$3x^2-52x+185=0$.解得$x_1=5$，$x_2=\frac{37}{3}$.

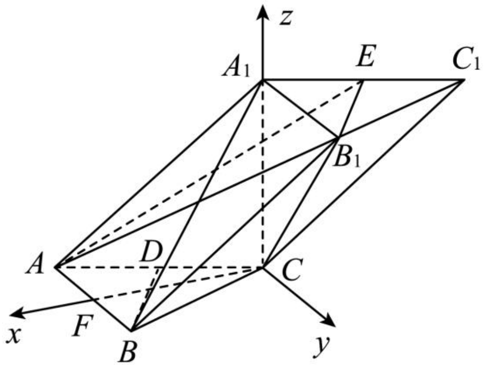
所以$AE=17-2x=7$，或$AE=-\frac{23}{3}$(不合题意，舍去)……12 分

19.（1）如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，取 AC 的中点 D，连接 BD，
因为$\triangle ABC$是等边三角形，则$BD\perp AC$，又$BD\subset$平面 ABC，
平面$AA_1C_1C\perp$平面 ABC，平面$AA_1C_1C\cap$平面$ABC=AC$，则$BD\perp$平面AA_1C_1C，
而$A_1C\subset$平面AA_1C_1C，于是$BD\perp A_1C$，又$A_1C\perp BC$，$BD\cap BC=B$，$BC\subset$平面 ABC，

因此 $A_1C\perp$ 平面 ABC，

又 $AC\subset$ 平面 ABC，则 $A_1C\perp AC$，于是 $AA_1=\sqrt{A_1C^2+AC^2}=\sqrt{A_1C^2+BC^2}=A_1B$，

所以 $A_1A=A_1B$.……6 分



（2）取 AB 的中点 F，连接 CF．由（1）得 $A_1C\perp$ 平面 ABC，

又 $B_1B//A_1A$，所以 $\angle A_1AC$ 是直线 B_1B 与平面 ABC 所成的角，即 $\angle A_1AC=45°$， $A_1C=AC=2$，

由（1）知 A_1C，CF，AB 两两互相垂直，以 C 为坐标原点，直线 CF 为 x 轴，

过点 C 且平行于 AB 的直线为 y 轴，直线 CA_1 为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0)$， $A(\sqrt{3},-1,0)$， $A_1(0,0,2)$， $B_1(0,2,2)$， $C_1(-\sqrt{3},1,2)$， $E(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},2)$，

于是 $\overrightarrow{AB_1}=\left(-\sqrt{3},3,2\right)$， $\overrightarrow{EB_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$， $\overrightarrow{CB_1}=(0,2,2)$，

设平面 AB_1E 的法向量为 $\vec{n}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+3y_1+2z_1=0\\ \sqrt{3}x_1+3y_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=\sqrt{3}$，得 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},-1,3\right)$，设直线 B_1C 与平面 AB_1E 所成的角为 θ

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{CB_1}\rangle\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{CB_1}\right|}=\frac{4}{\sqrt{13}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{26}}{13}$，

即直线 B_1C 与平面 AB_1E 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{26}}{13}$.……12 分

20．

（1）设事件 C 为“一天中甲员工午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐”，

事件 D 为“乙员工午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐”，

因为 100 个工作日中甲员工午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的天数为 30，

乙员工午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的天数为 40，

所以 $P\left(C\right)=\frac{30}{100}=0.3$， $P\left(D\right)=\frac{40}{100}=0.4$． ……4 分

（2）由题意知，甲员工午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率为 0.1，

乙员工午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率为 0.2，

记 X 为甲、乙两员工在一天中就餐餐厅的个数，则 X 的所有可能取值为 1、2，

所以 $P\left(X=1\right)=0.3\times0.2+0.1\times0.4=0.1$， $P\left(X=2\right)=1-P\left(X=1\right)=0.9$，

所以 X 的分布列为：

X	1	2
P	0.1	0.9

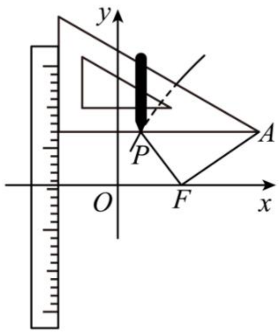
所以 X 的数学期望 $E(X)=1\times0.1+2\times0.9=1.9$．……8 分

（3）由题知 $P(N|M)>P(N|\bar{M})$，即 $\dfrac{P(NM)}{P(M)}>\dfrac{P(N\bar{M})}{P(\bar{M})}=\dfrac{P(N)-P(NM)}{1-P(M)}$，

即 $P(NM)>P(N)\cdot P(M)$，即 $P(NM)-P(N)P(NM)>P(N)\cdot P(M)-P(N)P(NM)$，

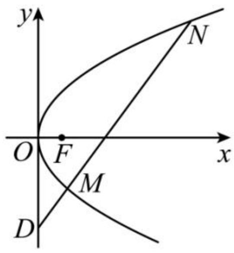
即 $P(NM)\cdot P(\bar{N})>P(N)\cdot P(\bar{N}M)$，即 $\dfrac{P(NM)}{P(N)}>\dfrac{P(\bar{N}M)}{P(\bar{N})}$，即 $P(M|N)>P(M|\bar{N})$．……12 分

21.（1）依题意，笔尖到点 F 的距离与它到直线 a 的距离相等，因此笔尖留下的轨迹为以 F 为焦点，a 为准线的抛物线，设其方程为 $y^2=2px(p>0)$，则 $F(\frac{p}{2},0)$，由 $\angle FAP=30^\circ,\angle AFP=90^\circ,|PF|+|PA|=3$，得 $|PA|=2|PF|,|PF|=1$，



由 $\angle FPA=60^\circ$ 得点 P 的横坐标 $\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{2}$，而抛物线的准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$，则 $\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{p}{2}=1$，解得 $p=\dfrac{3}{2}$，所以轨迹 C 的方程为 $y^2=3x$.……5 分

（2）假设存在 λ，使得 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DN}$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $y=kx-3$，



由 $\begin{cases}y=kx-3\\y^2=3x\end{cases}$ 消去 y 得：$k^2x^2-(6k+3)x+9=0$，

而 $k\in(0,2)$，$\Delta=(6k+3)^2-36k^2=36k+9>0$，$x_1+x_2=\dfrac{6k+3}{k^2},x_1x_2=\dfrac{9}{k^2}$，

$\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+2=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\dfrac{(\frac{6k+3}{k^2})^2}{\frac{9}{k^2}}=\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{4}{k}+4$，由 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DN}$ 得 $x_1=\lambda x_2$，即 $\lambda=\dfrac{x_1}{x_2}$，

于是 $\lambda+\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{4}{k}+2$，令 $t=\dfrac{1}{k}\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$，$\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{4}{k}+2=t^2+4t+2=(t+2)^2-2\in(\dfrac{17}{4},+\infty)$，

因此 $\lambda+\dfrac{1}{\lambda}>\dfrac{17}{4}$，又 $\lambda>0$，即 $\lambda^2-\dfrac{17}{4}\lambda+1>0$，解得 $0<\lambda<\dfrac{1}{4}$ 或 $\lambda>4$，

所以存在 $\lambda\in(0,\dfrac{1}{4})\cup(4,+\infty)$，使得 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DN}$ 成立.……12 分

22.

（1）根据题意，切线 l 的方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$，即 $y=e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0}$.

设曲线 $y=\ln x$ 在点 (x_1,y_1) 处的切线斜率为 e^{x_0}，

则 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_1}$，$x_1=\dfrac{1}{e^{x_0}}$，$y_1=-x_0$，即切点为 $\left(\dfrac{1}{e^{x_0}},-x_0\right)$，

所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $\left(\dfrac{1}{e^{x_0}},-x_0\right)$ 处的切线方程为 $y+x_0=e^{x_0}\left(x-\dfrac{1}{e^{x_0}}\right)$，

即 $y=\mathrm{e}^{x_0}x-x_0-1$.

因为 x_0 为方程 $f\left(x\right)=\frac{x+1}{x-1}$ 的一个实根，所以 $\mathrm{e}^{x_0}=\frac{x_0+1}{x_0-1}$，

所以 $-x_0\mathrm{e}^{x_0}+\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}\left(1-x_0\right)=\frac{x_0+1}{x_0-1}\left(1-x_0\right)=-1-x_0$ ，

所以这两条切线重合，即 l 为曲线 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\ln x$ 的公切线.……6 分

（2）因为 $f_i\left(x\right)=\mathrm{e}^{\left(\frac{i}{n}\right)^x}$ ， $i=1$，2，…， $\mathrm{n}-1$， $n\in\mathrm{N}^*$ 且 $n\geq2$，

所以对 $x\in\left[-1,1\right]$， $f_1\left(x\right)f_2\left(x\right)\cdots f_{n-1}\left(x\right)=\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{n}\right)^x}\mathrm{e}^{\left(\frac{2}{n}\right)^x}\cdots\mathrm{e}^{\left(\frac{n-1}{n}\right)^x}\geq\mathrm{e}^{-m}$ 恒成立，

即对 $x\in\left[-1,1\right]$， $e^{\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x}\geq\mathrm{e}^{-m}$ 恒成立，

所以对 $x\in\left[-1,1\right]$， $-m\leq\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x$ 恒成立.

因为 $y=\left(\frac{i}{n}\right)^x$ 在 $x\in\left[-1,1\right]$ 上单调递减，

所以 $y=\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x$ 在 $x\in\left[-1,1\right]$ 上单调递减，

所以当 $x=1$ 时，函数 $y=\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x$ 取最小值，

且 $\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right]_{\min}=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{2}$，

即对任意 $n\in\mathrm{N}^*$ 且 $n\geq2$， $-m\leq\frac{n-1}{2}$ 恒成立，

显然当 $n=2$ 时， $\left(\frac{n-1}{2}\right)_{\min}=\frac{1}{2}$， 所以 $-m\leq\frac{1}{2}$， 即 $m\geq-\frac{1}{2}$，

所以 m 的最小值为 $-\frac{1}{2}$.……12 分