

2023 年高中毕业年级第一次质量预测

理科数学 评分参考

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	C	C	D	A	B	D	C	B	B	B

二、填空题

13. -80; 14. $\frac{40}{9}$; 15. $x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0$; 16. (4, 5).

三、解答题

17. (1) 由题意 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} = n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$. (2 分)

当 $n=1$ 时, $a_1 = 0$; (3 分)

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = n - 3 + \frac{1}{2^{n-2}}$,

两式相减得 $\frac{a_n}{2^n} = n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}} - (n - 3 + \frac{1}{2^{n-2}}) = 1 - \frac{1}{2^{n-2}}$, (4 分)

所以 $a_n = 2^n - 2$, 当 $n=1$ 时也成立. (6 分)

(2) 根据题意, 得 $b_n = a_n \cdot \cos n\pi = (2^n - 2) \cos n\pi = \begin{cases} 2 - 2^n, n \text{ 为奇数} \\ 2^n - 2, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ (7 分)

所以 $T_{2n} = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2n-1} + b_{2n}$

$= (-2^1 + 2^2 - 2^3 + \cdots - 2^{2n-1} + 2^{2n}) + (2 - 2 + 2 - \cdots - 2 + 2)$ (9 分)

$= -2^1 + 2^2 - 2^3 + \cdots - 2^{2n-1} + 2^{2n} = \frac{-2[1 - (-2)^{2n}]}{1 - (-2)} = \frac{2 \cdot 4^n - 2}{3}$. (12 分)

18. (1) 连接AC、BD交于O, 以O为坐标原点, OA、OB、OP为x, y, z轴建立空间直角坐标系.

$$A(\sqrt{2}, 0, 0), B(0, \sqrt{2}, 0), P(0, 0, 2), C(-\sqrt{2}, 0, 0), D(0, -\sqrt{2}, 0),$$

$$E(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0), F(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1), \overrightarrow{AE} = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1), \overrightarrow{AF} = (-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1), \quad (2 \text{分})$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}, \text{ 得 } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} = (-\frac{4}{3}\sqrt{2}, 0, \frac{4}{3}), (4 \text{分})$$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = (-2\sqrt{2}, 0, 2)$, 所以 $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$, A、M、E、F四点共面, 即点M在平面AEF内. (6分)

$$(2) \overrightarrow{PB} = (0, \sqrt{2}, -2), \text{ 设平面 AEF 的法向量 } \vec{n} = (x, y, z),$$

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \end{cases} \text{ 得, } \vec{n} = (1, 0, \sqrt{2}), \quad (8 \text{分})$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{PB}, \vec{n} \rangle = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2}{3}, \text{ 所以直线 PB 与平面 AEF 所成角的正弦值为 } \frac{2}{3}. \quad (12 \text{分})$$

19. (1) 由题意知, $X \sim B(5, \frac{1}{2})$, X 可能的取值为0, 1, 2, 3, 4, 5, (2分)

$$P(X=0) = (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}, \quad P(X=1) = C_5^1 (\frac{1}{2})^5 = \frac{5}{32},$$

$$P(X=2) = C_5^2 (\frac{1}{2})^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}, \quad P(X=3) = C_5^3 (\frac{1}{2})^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16},$$

$$P(X=4) = C_5^4 (\frac{1}{2})^5 = \frac{5}{32}, \quad P(X=5) = (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}. (4 \text{分})$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X) = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \quad (6 \text{分})$$

(2) 设“第四轮点球结束时, 乙队进了4个球并胜出”为事件A,

由题意知, 甲乙两队比分为1:4或2:4, 设“甲乙两队比分为1:4”为事件 A_1 , “甲乙两

队比分为2:4”为事件 A_2 ,

若甲乙两队比分为1:4, 则乙射进4次, 甲前三次射进一次, 第4次未进,

$$P(A_1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{1}{27} \quad (8分)$$

若甲乙两队比分为2:4, 则乙射进4次, 甲前四次射进两次,

$$P(A_2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{27}, (9分)$$

$$所以 P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{1}{9}. (10分)$$

即在第四轮点球结束时, 乙队进了4个球并胜出的概率为 $\frac{1}{9}$. (12分)

$$20. (1) 由题设得 \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{2}, 解得 a^2 = 6, b^2 = 3. (3分)$$

$$所以 C 的方程为 \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1. (5分)$$

$$(2) 设直线 l 的方程为 y = kx + m, 代入 \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 得$$

$$(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0. (6分)$$

$$于是 x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1 + 2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 6}{1 + 2k^2}. (7分)$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $D(-x_1, -y_1)$,

$$k_{PA} \cdot k_{PD} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_1 + 1}{x_1 + 2} = \frac{y_1^2 - 1}{x_1^2 - 2} = -\frac{1}{2}, 又 k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{2}, 所以 k_{PA} = -k_2. (8分)$$

$$即 k_{PA} + k_{PB} = 0, \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = 0, 即 (y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2) = 0,$$

$$(kx_1 + m - 1)(x_2 - 2) + (kx_2 + m - 1)(x_1 - 2) = 0,$$

$$2kx_1 x_2 + (m - 1 - 2k)(x_1 + x_2) - 4(m - 1) = 0, 将 x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1 + 2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 6}{1 + 2k^2}$$

$$代入整理得 2k^2 - 3k + 1 + mk - m = 0, 即 (k - 1)(2k - 1 + m) = 0, (10分)$$

$$当 2k - 1 + m = 0, m = 1 - 2k, 直线 y = kx + m 过点 P(2, 1), 舍去, 所以 k = 1. (12分)$$

$$21. (1) f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x,$$

所以在 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, (2分)

在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, (3分)

所以 $f(x)$ 单调递增区间为 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{\pi}{2})$, 单调递减区间为 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. (5分)

(2) 设 $F(x) = x \sin x + \cos x - a(x^2 + 1)$, $x \in [0, \pi]$,

$F'(x) = x \cos x - 2ax = x(\cos x - 2a)$, (6分)

当 $2a \leq -1$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $F'(x) \geq 0$, $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增, (7分)

$F_{\max}(x) = F(\pi) = -1 - a(\pi^2 + 1) \geq 0$, $a \leq -\frac{1}{\pi^2 + 1}$, 所以 $a \leq -\frac{1}{2}$ 成立;

当 $2a \geq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $F'(x) \leq 0$, $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减, $F_{\max}(x) = F(0) = 1 - a \geq 0$,

$a \leq 1$, 所以 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$; (8分)

当 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时, $\exists x_0 \in (0, \pi)$, $\cos x_0 = 2a$, 当 $x \in (0, x_0)$, $\cos x > 2a$, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递

增, 当 $x \in (x_0, \pi)$, $\cos x < 2a$, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减, (9分)

$$\begin{aligned} F_{\max}(x) &= F(x_0) = x_0 \sin x_0 + \cos x_0 - a(x_0^2 + 1) = x_0 \sin x_0 + \cos x_0 - \frac{1}{2} \cos x_0 (x_0^2 + 1), \\ &= x_0 \sin x_0 + \frac{1}{2} \cos x_0 - \frac{x_0^2}{2} \cos x_0, \end{aligned}$$

令 $\varphi(x) = x \sin x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{x^2}{2} \cos x$, $x \in (0, \pi)$,

$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x^2}{2} \sin x > 0$, 所以 $\varphi(x) > \varphi(0) = \frac{1}{2}$, $F(x_0) \geq 0$ 成立.

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$. (12分)

$$22. (1) \text{ 曲线 } C \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{1}{\cos \alpha}, \\ y = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha}{\cos \alpha}, \end{cases} (\alpha \text{ 为参数, } \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}),$$

所以 $x^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\frac{y^2}{3} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$, 所以 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

即曲线 C 的普通方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. (3分)

直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, 则 $\rho\left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{3}\right) = 1$,

转换为直角坐标方程为 $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$. (5分)

(2) 直线 l 过点 $P(2,0)$, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\frac{1}{2}t, \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

令点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

由 $\begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\frac{1}{2}t \end{cases}$ 代入 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 得 $2t^2 + 6\sqrt{3}t + 9 = 0$,

则 $t_1 + t_2 = -3\sqrt{3}$, $t_1 t_2 = \frac{9}{2}$, (8分)

故 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{|t_1 + t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (10分)

23. (1) ①当 $x \leq -1$ 时, $1 - 3x \leq 5 \Rightarrow x \geq -\frac{4}{3}$, 解得 $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$;

②当 $-1 < x \leq 3$ 时, $x + 5 \leq 5 \Rightarrow x \leq 0$, 解得 $-1 < x \leq 0$;

③当 $x > 3$ 时, $3x - 1 \leq 5 \Rightarrow x \leq 2$, 无解,

综上: 不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{4}{3} \leq x \leq 0\right\}$. (5分)

(2) 因为 $f(x) = 2|x+1| + |x-3| = |x+1| + |x-3| + |x+1| \geq |x+1-x+3| + 0 = 4$,

当且仅当 $x = -1$ 时等号成立.

所以 $m = 4$, 即 $a + b + c = m = 4$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} &= \frac{1}{8}[(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{b+c}{a+b} + \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \right) \\ &\geq \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \left(2\sqrt{\frac{b+c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{b+c}} + 2\sqrt{\frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{c+a}{b+c}} + 2\sqrt{\frac{a+b}{c+a} \cdot \frac{c+a}{a+b}} \right) = \frac{9}{8}, \end{aligned}$$

当且仅当 $a+b=b+c=c+a$, 即 $a=b=c=\frac{4}{3}$ 时, 等号成立. (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线