河南省顶级名校2022届高三上学期9月开学联考

数学（文科）试卷

注意事项：

1．本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，$B=\{x\mid x<0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{x\mid -1<x<0\}$　　B．$\{x\mid 0<x<2\}$

C．$\{x\mid -2<x<0\}$　　D．$\{x\mid -1<x<2\}$

2．已知命题p：$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin x<\tan x$；命题q：$\exists x\in(-\infty,0)$，$\pi^{-x}<e^{-x}$，则下列命题为真命题的是

A．$p\wedge q$　　B．$p\wedge(\neg q)$

C．$(\neg p)\wedge q$　　D．$(\neg p)\vee q$

3．已知复数 $z=i+i^{2021}$，则 $|z-1|$ 等于

A．$\sqrt{2}$　　B．1

C．0　　D．$\sqrt{5}$

4．三个半径为1的铁球，熔化成一个大球，这个大球的半径为

A．2　　B．$\sqrt{2}$

C．$\sqrt[3]{2}$　　D．$\sqrt[3]{3}$

5．已知 $f(x)=ax^2+bx+1$ 是定义在 $[a-1,2a]$ 上的偶函数，那么 $y=f(x)$ 的最大值是

A．1　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{31}{27}$

6．对实数p、q和向量 **a**，**b**，**c**，正确的是

A．$p(\mathbf{a}-\mathbf{b})=p\mathbf{a}-p\mathbf{b}$　　B．$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$

C．若 $|\mathbf{a}|^2\mathbf{b}=|\mathbf{b}|^2\mathbf{a}$，则 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$　　D．若 $p\mathbf{a}=q\mathbf{a}$（p、$q\in\mathbf{R}$），则 $p=q$

7．若数列$\{b_n\}$满足：$b_1+3b_2+7b_3+\cdots+\left(2^n-1\right)b_n=2n$，则数列$\{b_n\}$的通项公式为

A．$b_n=2n-1$　　B．$b_n=2^n-1$

C．$b_n=\dfrac{1}{2^n-1}$　　D．$b_n=\dfrac{2}{2^n-1}$

8．一个骰子连续投 2 次，观察骰子朝上的点数，点数和为 i（i=2，3，…，12）的概率记作 P_i，则 P_i 的最大值是

A．$\dfrac{1}{12}$　　B．$\dfrac{1}{6}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

9．设函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{3}{4}$（$\omega\in N^*$）在$[\dfrac{5\pi}{12}，\dfrac{5\pi}{6}]$上单调递减，则下列叙述正确的是

A．f（x）的最小正周期为2π

B．f（x）关于直线 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 轴对称

C．f（x）在$[\dfrac{\pi}{2}，\pi]$上的最小值为$-\dfrac{5}{4}$

D．f（x）关于点（$\dfrac{2\pi}{3}$，0）对称

10．已知定义在 **R** 上的函数 f（x），其导函数为 $f'\left(x\right)$，当 x>0 时 $f'\left(x\right)-\dfrac{f\left(x\right)}{x}>0$，若 a=2f（1），b=f（2），$c=4f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，则 a，b，c 的大小关系是

A．c<b<a　　B．c<a<b　　C．b<a<c　　D．a<b<c

11．菜农采摘蔬菜，采摘下来的蔬菜会慢慢失去新鲜度．已知某种蔬菜失去的新鲜度 h 与其采摘后时间 t（小时）满足的函数关系式为 $h=m\cdot a^t$．若采摘后 20 小时，这种蔬菜失去的新鲜度为 20%，采摘后 30 小时，这种蔬菜失去的新鲜度为 40%．那么采摘下来的这种蔬菜在多长时间后失去 50%新鲜度（参考数据 lg 2≈0．3，结果取整数）

A．23 小时　　B．33 小时　　C．50 小时　　D．56 小时

12．已知过 P（$\dfrac{3}{4}$，0）的直线与抛物线 $y^2=3x$（x>0）交于 A，B 两点，M 为弦 AB 的中点，O 为坐标原点，直线 OM 与抛物线的另一个交点为 N，则两点 N、M 纵坐标的比值范围是

A．（2，+∞）　　B．（3，+∞）　　C．[2，+∞）　　D．[3，+∞）

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．设曲线 $y=\dfrac{x}{x-2}$ 在点（3，3）处的切线与直线 ax－y－1＝0 平行，则 a 等于__________．

14．据《九章算术》记载：将底面钝角为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的菱形的直棱柱对角面斜割一分为二得到的两个一模一样的三棱柱体，古人称之为堑堵．若堑堵的所有棱长都为 3，则其外接球的表面积为__________．

15．在△ABC 中，角 A、B、C 的对边分别是 a、b、c，已知 $c=\dfrac{2a+b-\sqrt{3}\cdot a\cdot\sin C}{\cos A}$，则角 C 的值为__________．

16．已知两点 F、Q 分别是焦距为 $4\sqrt{6}$ 的双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的右焦点及左支上一动点，单位圆与 y 轴的交点为 P，且｜PQ｜＋｜QF｜＋｜PF｜≥13，则双曲线 C 的离心率的最大值为__________．

三、解答题：本大题共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（本小题满分 12 分）

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，已知 $a_2=2$，$a_3+a_6=9$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式及 T_n；

（2）求数列 $\{\dfrac{1}{T_n}+2^n\}$ 的前 n 项和 S_n．

18．（本小题满分 12 分）

机动车行经人行横道时，应当减速慢行；遇行人正在通过人行横道，应当停车让行，俗称“礼让行人”．下表是某市一主干道路口监控设备所抓拍的 5 个月内驾驶员不“礼让行人”行为统计数据：

月份	1	2	3	4	5
违章驾驶人次	125	105	100	90	80

（1）由表中看出，可用线性回归模型拟合违章人次 y 与月份 x 之间的关系，求 y 关于 x

的回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并预测该路口 7 月份不“礼让行人”违规驾驶人次；

（2）交警从这 5 个月内通过该路口的驾驶员中随机抽查 90 人，调查驾驶员“礼让行人”行为与驾龄的关系，得到下表：

	不礼让行人	礼让行人
驾龄不超过 2 年	24	16
驾龄 2 年以上	26	24

能否据此判断有 90%的把握认为“礼让行人行为与驾龄有关?”

附：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a-b+c+d$.

$P(K^2>k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

19.（本小题满分 12 分）

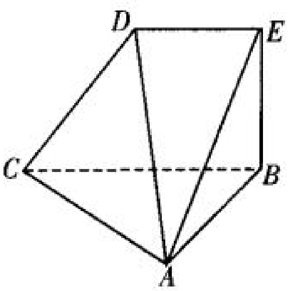
若函数 $f(x)=ax^3-bx+4$，当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$ 有极值 $-\dfrac{4}{3}$.

（1）求函数的递减区间；

（2）若关于 x 的方程 $f(x)-k=0$ 有一个零点，求实数 k 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 A—BCDE 中，BC∥DE，BE⊥BC，AB=BC=AC=2DE=2BE=AD=2.



（1）证明：平面 BCDE⊥平面 ABC；

（2）经过 A，D 的平面 α 将四棱锥 A—BCDE 分成的左、右两部分的体积之比为 1：2，

求平面α截四棱锥 A—BCDE 的截面面积.

21.（本小题满分 12 分）

已知 F_1，F_2 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右焦点，椭圆上任意一点 P 到焦点距离的最小值与最大值之比为$\frac{1}{3}$，过 F_1 且垂直于长轴的椭圆 C 的弦长为 3.

（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）过 F_1 的直线与椭圆 C 相交的交点 A、B 与右焦点 F_2 所围成的三角形的内切圆面积是否存在最大值?若存在，试求出最大值；若不存在，说明理由.

（二）选考题：共 10 分．请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 极坐标方程为$\rho\sin\theta=4$.

（1）M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足｜OM｜·｜OP｜＝16，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;

（2）已知 F（－1，0），过点 F 且倾斜角为$\frac{\pi}{6}$的直线与 C_2 交于 A、B 两点，求｜FA｜＋｜FB｜.

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知 a＞0，b＞0，$a^2+b^2=2$.

证明：（1）$(a+b)(a^3+b^3)\geq 4$;

（2）$a^2b+b^2a\leq 2$.

数学(文科)参考答案

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	A	B	D	D	D	A	D	B	C	B	B	A

1. A 【解析】∵集合 $A=\{x|-1<x<2\}$,$B=\{x|x<0\}$,

∴$A\cap B=\{x|-1<x<0\}$.

故选 A.

3. D 【解析】∵$i^4=1$,则 $z=i+i^{2021}=i+i^{4\times505+1}=2i$,则 $z-1=2i-1$,故 $|z-1|=\sqrt{5}$.

故选 D.

4. D 【解析】设熔化后的球的半径为 R,则其体积是原来小球的体积的 3 倍,

即 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=3\times\frac{4}{3}\pi\times1^3$,得 $R=\sqrt[3]{3}$.

故选 D.

5. D 【解析】根据题意,$f(x)=ax^2+bx+1$ 是定义在$[a-1,2a]$上的偶函数,则有$(a-1)+2a=3a-1=0$,则 $a=\frac{1}{3}$,

同时 $f(-x)=f(x)$,即 $ax^2+bx+1=a(-x)^2+b(-x)+1$,则有 $bx=0$,必有 $b=0$.

则 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+1$,其定义域为$\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$,

则 $y=f(x)$的最大值为 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{31}{27}$,

故选 D.

6. A 【解析】A 选项显然正确;B 选项中 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$,表示与 $\boldsymbol{c}$ 平行的某个向量,$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 平行的某个向量,显然不一定相等,B 错误;C 选项中当 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时,C 错误,同理 D 错误,故选 A.

8. B 【解析】一个骰子连续投 2 次,共有(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),

(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),

(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),

(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),

(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),

(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),共 36 个基本事件,

其中两个数和为 7 共有 6 个基本事件,其他两数和的基本事件个数都小于 6 个,

故 P_i 的最大值是 $P_7=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

故选 B.

9. C 【解析】由条件知 $\frac{1}{2}T\geqslant\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$，∴ $\frac{\pi}{\omega}\geqslant\frac{5\pi}{12}$，∴ $\omega\leqslant\frac{12}{5}$，∵ $\omega\in\mathbf{N}^*$，∴ $\omega=1$ 或 $\omega=2$．$\omega=1$ 时

$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{4}$ 在 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上不单调递减；∴ $\omega=2$，$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{4}$.

10. B 【解析】构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}(x>0)$，得 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\left(f'(x)-\frac{f(x)}{x}\right)$，

由题知 $x>0$ 时 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

∴ $\frac{f(2)}{2}>\frac{f(1)}{1}>\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$，即 $f(2)>2f(1)>4f\left(\frac{1}{2}\right)$，即 $b>a>c$，选 B.

11. B 【解析】由题意可得 $\begin{cases}h(20)=ma^{20}=0.2\\ h(30)=ma^{30}=0.4\end{cases}$，解得 $a=2^{\frac{1}{10}}$，$m=0.05$，

故 $h(t)=0.05\times(2^{\frac{1}{10}})^t$. 令 $h(t)=0.05\times(2^{\frac{1}{10}})^t=0.5$，可得 $2^{\frac{t}{10}}=10$，

两边同时去对数，故 $t=10\cdot\frac{\lg 10}{\lg 2}=\frac{10}{0.3}\approx 33$ 小时.

12. A 【解析】设直线 AB：$my=x-\frac{3}{4}(m\neq 0)$，代入 $y^2=3x(x>0)$ 得 $y^2-3my-\frac{9}{4}=0$，

∴ $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{3}{2}m$，$x_M=my_M+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}m^2+\frac{3}{4}$，∴ $K_{OM}=\frac{y_M}{x_M}=\frac{2m}{2m^2+1}$，

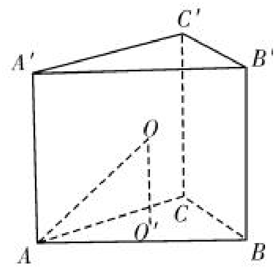
∴直线 OM：$y=\frac{2m}{2m^2+1}x$. 代入 $y^2=3x(x>0)$ 得 $y_N=\frac{3(2m^2+1)}{2m}$，∴ $\frac{y_N}{y_M}=2+\frac{1}{m^2}>2$.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -2 【解析】对函数 $y=\frac{x}{x-2}$ 求导得 $y'=\frac{x-2-x}{(x-2)^2}=-\frac{2}{(x-2)^2}$，

由已知条件可得 $a=y'|_{x=3}=-2$，所以，$a=-2$.

14. 21π 【解析】球心 O 到下底面的距离 $OO'=\frac{3}{2}$，$AO'=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\sqrt{3}$.



∴其外接球的半径 $R=\sqrt{AO'^2+OO'^2}=\sqrt{\frac{21}{4}}$，

∴其外接球的表面积为 $4\pi R^2=21\pi$.

15. $\frac{2\pi}{3}$ 【解析】由 $c=\frac{2a+b-\sqrt{3}\cdot a\cdot\sin C}{\cos A}$，得 $2a+b-c\cos A-\sqrt{3}a\sin C=0$，

根据正弦定理得：$2\sin A+\sin B-\sin C\cos A-\sqrt{3}\sin A\sin C=0$，

∴ $2\sin A+\sin A\cos C+\cos A\sin C-\sin C\cos A-\sqrt{3}\sin A\sin C=0$.

又 $A\in(0,\pi)$，∴ $\sin A\neq 0$，∴ $-\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C=1$，

即 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=1$. ∵ $C\in(0,\pi)$，

∴ $-\frac{\pi}{6}<C-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$.

$\therefore C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$.

16. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ 【解析】设双曲线 C 的左焦点为 F'，则 $|QF|-|QF'|=2a$. 即 $|QF|=|QF'|+2a$，故 $|QF|+|PQ|=|QF'|+|PQ|+2a\geqslant|PF'|+2a$. 由题意可得 $|PF|=|PF'|=\sqrt{24+1}=5$，$\because|PQ|+|QF|+|PF|\geqslant13$. $\therefore a\geqslant\frac{3}{2}$. 则双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{6}}{a}\leqslant\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

三、解答题：本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 由题意，设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $\begin{cases}a_2=a_1+d=2,\\a_3+a_6=a_1+2d+a_1+5d=9,\end{cases}$ ………………………… 2 分

整理，得 $\begin{cases}a_1+d=2,\\2a_1+7d=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=1,\end{cases}$ ………………………… 4 分

$\therefore a_n=1+1\cdot(n-1)=n, n\in\mathbf{N}^*$. ………………………… 5 分

$T_n=n\cdot1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot1=\frac{n(n+1)}{2}$. ………………………… 6 分

(2) 由 (1) 知，$\frac{1}{T_n}+2^n=\frac{2}{n(n+1)}+2^n=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+2^n$，

$\therefore S_n=\left(\frac{1}{T_1}+2^1\right)+\left(\frac{1}{T_2}+2^2\right)+\cdots+\left(\frac{1}{T_n}+2^n\right)$

$=\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}\right)+(2^1+2^2+\cdots+2^n)$

$=2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+2\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{2-2^{n+1}}{1-2}$

$=2\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{2-2^{n+1}}{1-2}$

$=2\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+2^{n+1}-2$

$=2^{n+1}-\frac{2}{n+1}$. ………………………… 12 分

18.【解析】(1) 由表中数据知，$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{125+105+100+90+80}{5}=100$.

所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=-50-5+0-10-40=-105$.

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=4+1+0+1+4=10$.

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{-105}{10}=-10.5$，$\hat{a}=100-(-10.5)\times3=131.5$，

所以 $\hat{y}=-10.5x+131.5$，

所以令 $x=7$，则 $\hat{y}=-10.5\times7+131.5=58$ 人，

故预测该路口7月份不"礼让行人"违规驾驶人次为58人次. ………………………………… 6分

(2)根据表中的列联表补全得下表：

	不礼让行人	礼让行人	合计
驾龄不超过2年	24	16	40
驾龄2年以上	26	24	50
合计	50	40	90

故 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{90\times(24\times24-16\times26)^2}{50\times40\times40\times50}\approx0.58<2.706$，

所以没有90%的把握认为"礼让行人行为与驾龄有关". ………………………………… 12分

19.【解析】(1) $f'(x)=3ax^2-b$，

由题意知 $\begin{cases}f'(2)=12a-b=0,\\ f(2)=8a-2b+4=-\dfrac{4}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3},\\ b=4.\end{cases}$

故所求的解析式为 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x+4$，

可得 $f'(x)=x^2-4=(x-2)(x+2)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=2$ 或 $x=-2$，

由此可得

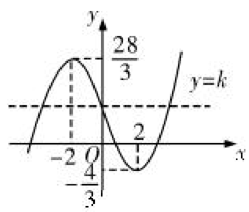
x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数的递减区间为 $(-2,2)$. ………………………………… 6分

(2)由(1)知，得到当 $x<-2$ 或 $x>2$ 时，$f(x)$ 为增函数；

当 $-2<x<2$ 时，$f(x)$ 为减函数，

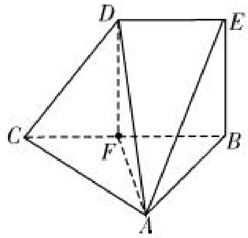
∴函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x+4$ 的图象大致如图，



由图可知当 $k<-\dfrac{4}{3}$ 或 $k>\dfrac{28}{3}$ 时，$f(x)$ 与 $y=k$ 有一个交点.

所以实数 k 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{28}{3},+\infty\right)$. ………………………………… 12分

20.【解析】(1)证明：取 BC 中点 F，连接 AF，DF.



$\because BF \underline{\parallel} DE$，$\therefore DF \underline{\parallel} BE$，

$\therefore DF \perp BC$， ………………………………………………………… 2 分

$\because AB = BC = AC = 2$.

$\therefore AF = \sqrt{3}$.

$\therefore DF^2 + AF^2 = AD^2$ 即 $DF \perp AF$，

$\therefore DF \perp$ 平面 ABC， ………………………………………………………… 4 分

又$\because DF \subset$ 平面 $BCDE$，

$\therefore$ 平面 $BCDE \perp$ 平面 ABC. ………………………………………………… 6 分

(2)设面 α 交 BC 于一点 M，令 $CM = x$，

则 $BM = 2 - x$，

$\because \dfrac{V_{A-DCM}}{V_{A-BEDM}} = \dfrac{1}{2}$，

即：$\dfrac{\frac{1}{3}S_{\triangle DCM} \cdot h}{\frac{1}{3}S_{四边形BEDM} \cdot h} = \dfrac{1}{2}$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle DCM}}{S_{四边形BEDM}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times x \times 1}{\frac{1}{2} \times (1 + 2 - x) \times 1} = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore x = 1$，即 M 为 BC 的中点. ………………………………………… 10 分

$\therefore S_{截面} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)依题意易得：$(a-c):(a+c) = \dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2b^2}{a} = 3$，

得：$a = 2, c = 1, b^2 = a^2 - c^2 = 3$，故椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. ……………… 4 分

(2)设$\triangle ABF_2$ 的内切圆半径为 r，$\therefore S_{\triangle ABF_2} = \dfrac{1}{2}(|AF_2| + |AB| + |BF_2|) \cdot r$.

又$\because |AF_2| + |AB| + |BF_2| = 8$，$\therefore S_{\triangle ABF_2} = 4r$，

要使$\triangle ABF_2$ 的内切圆面积最大，只需 $S_{\triangle ABF_2}$ 的值最大. ……………………… 6 分

易知直线 l 斜率不为 0，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，直线 $l: x = my - 1$，联立$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \\ x = my - 1 \end{cases}$ 消去 x 得：

$(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$.

易得$\triangle > 0$，且 $y_1 + y_2 = \dfrac{6m}{3m^2 + 4}$，$y_1 \cdot y_2 = \dfrac{-9}{3m^2 + 4}$，

$\therefore S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}=\sqrt{\frac{36m^2}{(3m^2+4)^2}+\frac{36}{3m^2+4}}=$

$\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3(m^2+1)+1}$，…………………………………………………………………… 8 分

设 $t=\sqrt{m^2+1}\geqslant1$，则 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{12t}{3t^2+1}=\frac{12}{3t+\frac{1}{t}}$，

设 $y=3t+\frac{1}{t}(t\geqslant1)$，$y'=3-\frac{1}{t^2}>0$，

$\therefore$ 当 $t=1$，即 $m=0$ 时，$S_{\triangle ABF_2}$ 的最大值为 3，

此时 $r=\frac{3}{4}$，$\therefore\triangle ABF_2$ 的内切圆面积最大为 $\frac{9\pi}{16}$． …………………………………… 12 分

22.【解析】(1)设 P 的极坐标为 $(\rho,\theta)(\rho>0)$，M 的极坐标为 $(\rho_1,\theta)(\rho_1>0)$．

由题意知 $|OP|=\rho$，$|OM|=\rho_1=\frac{4}{\sin\theta}$．

由 $|OM|\cdot|OP|=16$ 得 C_2 的极坐标方程 $\rho=4\sin\theta(\rho>0)$．

因此 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=4(y\neq0)$． ………………………………… 5 分

(2)设过 F 点的直线参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，

将直线的参数方程代入 C_2 的方程，得 $t^2-(2+\sqrt{3})t+1=0$．

设 A、B 对应的参数分别为 t_1、t_2，

则 $t_1+t_2=2+\sqrt{3}$，$t_1t_2=1$，$\therefore t_1>0$，$t_2>0$，

则 $|FA|+|FB|=|t_1|+|t_2|=t_1+t_2=2+\sqrt{3}$． ………………………………………… 10 分

23.【解析】(1) $(a+b)(a^3+b^3)=a^4+ab^3+ba^3+b^4\geqslant a^4+2\sqrt{ab^3\cdot ba^3}+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4$

$=(a^2+b^2)^2=4$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号；…………………………………………… 5 分

(2) $\because 2=a^2+b^2\geqslant2ab$，$\therefore ab\leqslant1$（当且仅当 $a=b=1$ 时取等号）①

又 $\because(a+b)^2\leqslant2(a^2+b^2)=4$，又 $\because a>0,b>0$，$\therefore a+b\leqslant2$（当且仅当 $a=b=1$ 时取等号）②，

又 $\because a,b$ 均为正数，两式相乘得证． ……………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。