2023届高三年级4月份大联考

数学试题

本试卷共4页,22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x>2\}$, $B=\{x|2\leqslant 2^x\leqslant 8\}$, 则 $A\cap B=$

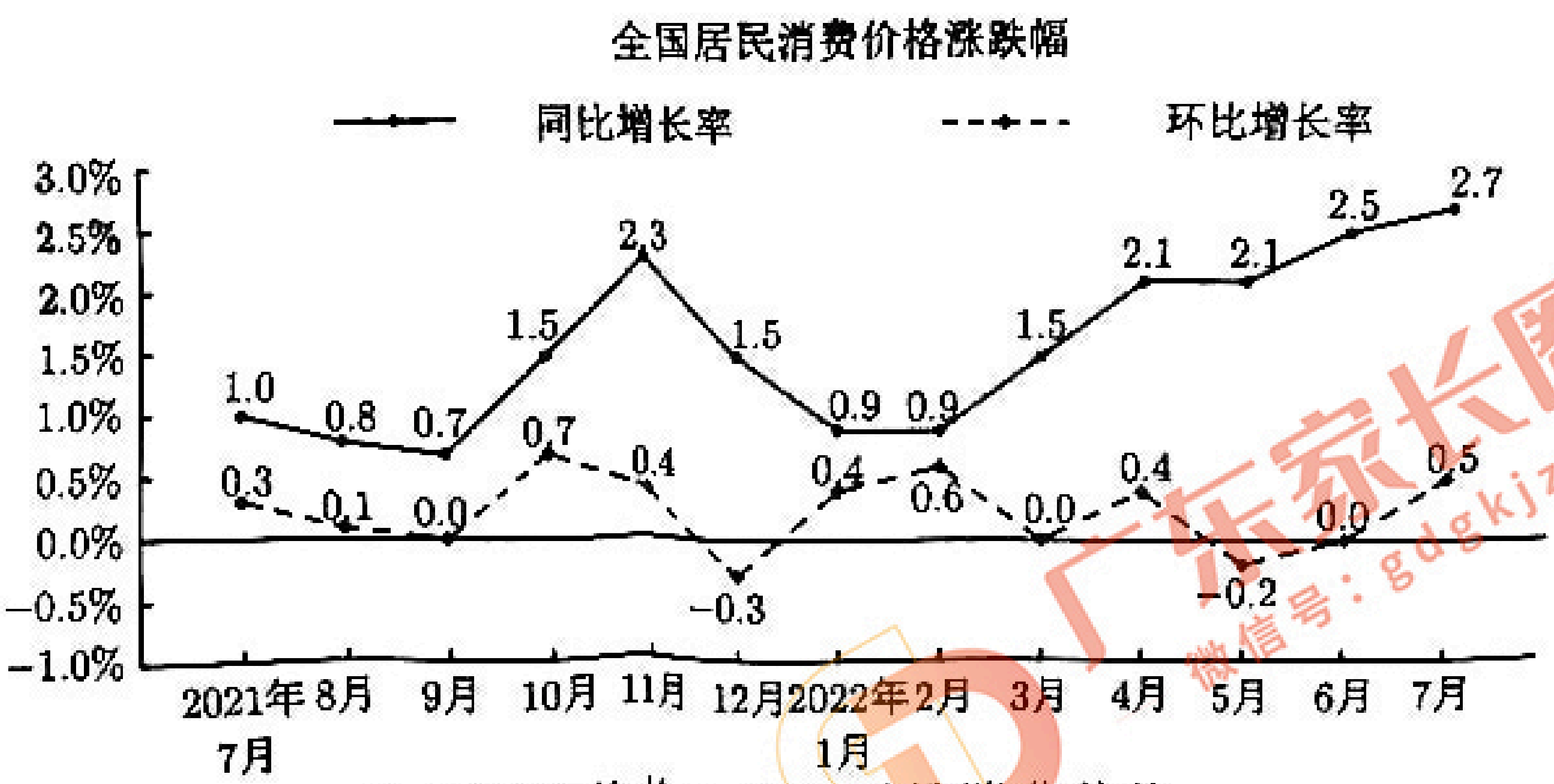
A. $[1,+\infty)$　　B. $[0,+\infty)$　　C. $(2,3]$　　D. $(2,3)$

2. "$\ln x>\ln y$"是"$x^3>y^3$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 2021年7月至2022年7月,我国居民消费价格保持平稳,居民消费价格涨跌幅如图所示,则以下一定正确的序号为



备注:同比增长率 $=\dfrac{\text{当月消费价格}-\text{去年同月消费价格}}{\text{去年同月消费价格}}\times 100\%$,环比增长率 $=\dfrac{\text{当月消费价格}-\text{上月消费价格}}{\text{上月消费价格}}\times 100\%$.

①2021年7月至2022年7月全国居民消费价格环比增长率的极差为1%

②2021年7月至2022年7月全国居民消费价格同比增长率的中位数与众数相同

③从同比增长率看,2022年1月与2022年2月全国居民消费价格一定相同

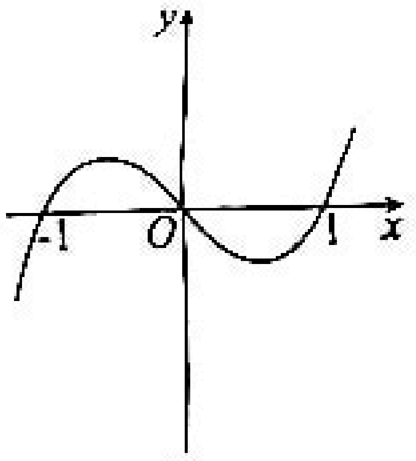
④从环比增长率看,2022年6月全国居民消费价格与2022年5月全国居民消费价格相同

A. ①②　　B. ②③　　C. ①②④　　D. ①②③④

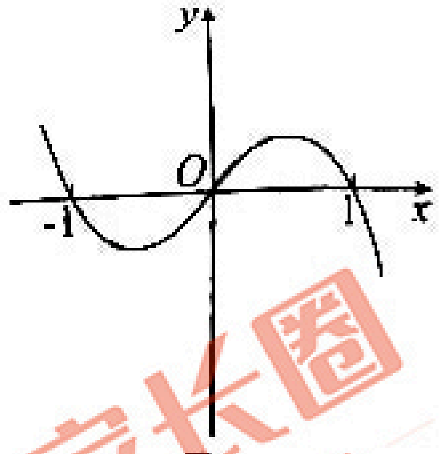
4. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T，若 $f(T)=\frac{1}{2}$，且 $x=\frac{7\pi}{3}$ 为函数 $f(x)$ 的极值点，则 ω 的最小值为

A. 3　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{2}{7}$　　D. $\frac{1}{7}$

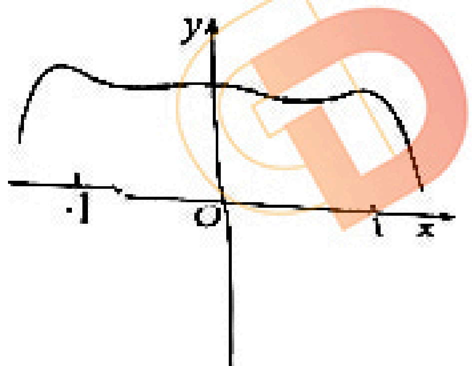
5. 函数 $f(x)=\sin(x^3-x)$ 的部分图象可以为



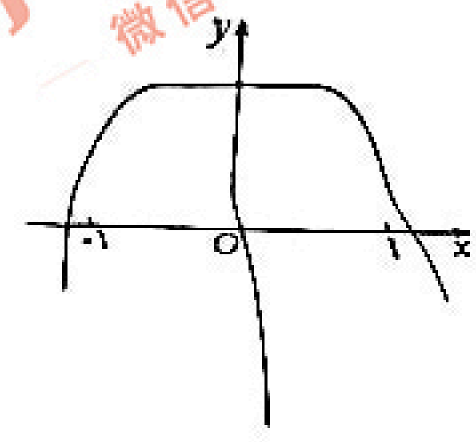
A.



B.



C.



D.

6. 已知正三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的底面边长为 1，直线 A_1B 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{1}{3}$，则正三棱柱的体积为

A. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{8}$ 或 $\frac{3\sqrt{5}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{16}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{16}$

7. 若 $a=\log_9 3\ 000$，$b=\log_4 2\ 023$，$c=\frac{11\times1.001^{0.01}}{2}$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

8. 已知函数 $f(x)=x^2-4x$ 在点 P（位于第四象限）处的切线 l 与 x 轴正半轴、y 轴负半轴分别交于 B、C 点，当直线 l、曲线 $f(x)$、x 轴及 y 轴所围成图形的面积取最小值时，$\frac{CP}{PB}=$

A. 3　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $z\in\mathbf{C}$，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则

A. 若 $z=\frac{1+3i}{1-3i}$，则 $\bar{z}=\frac{-4-3i}{5}$

B. 若 z 为纯虚数，则 $z^2<0$

C. 若 $z-(2+i)>0$，则 $z>2+i$

D. 若 $M=\{z\,|\,|z+3i|\leqslant3\}$，则集合 M 所构成区域的面积为 6π

10. 已知过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A，B 两点，且满足 $|AF|>|BF|$. 若 $|AB|=3$，则

A. l 的斜率的绝对值为 $2\sqrt{2}$　　B. $|AF|-|BF|=\sqrt{3}$

C. $|AF|\cdot|BF|=\frac{3}{2}$　　D. $\frac{|AF|}{|BF|}=2+\sqrt{3}$

11. 在边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 中，P 为边 AF 上的动点，Q 为边 BC 上的一个动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的值可以为

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的半焦距为 c,右焦点为 F,短轴的上端点为 B,离心率为 e,O 为坐标原点,则

A. 若 $2b>a+c$,则 $b^2>ac$　　　　B. 若 $b^2>ac$,则 $2b>a+c$

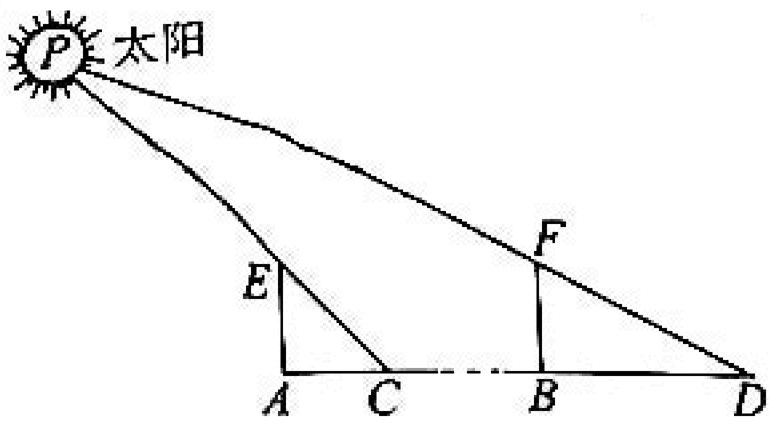
C. 若 $\tan\angle BFO>1$,则 $0<e<\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D. 若 $\tan\angle BFO>1$,则 $\frac{\sqrt{2}}{2}<e<1$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,若 $P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant 2)$,则 $\mu=$________.

14. 直线 $l:kx-y+2=0$,圆 $C:x^2+y^2-4x-12=0$,设直线 l 与圆 C 相交于 Q,R 两点,则△QRC 面积的最大值为________.

15. "寸影千里"法是《周髀算经》中记载的一种远距离测量的估算方法.其具体方法是在同一天(如夏至)的正午,于两地分别竖起同高的标杆,然后测量标杆的影长,并根据"日影差一寸,实地相距千里"的原则推算两地距离.如图,某人在夏至的正午分别在同一水平面上的 A,B 两地竖起高度均为 a 寸的标杆 AE 与 BF,AC 与 BD 分别为标杆 AE 与 BF 在地面的影长,再按影长 AC 与 BD 的差结合"寸影千里"来推算 A,B 两地的距离.记 $\angle CEA=\alpha$,$\angle BFD=\beta(\alpha<\beta)$,若 $\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{4}$,则按照"寸影千里"的原则 A,B 两地的距离(里)大约为________.



16. 已知三棱锥 $V-ABC$ 的体积为 4,D,E,F 分别为棱 VC,VA,VB 的中点,设平面 ABD、平面 BCE、平面 ACF 相交于 O 点,三棱锥 $O-ABC$ 的三个侧面与三棱锥 $V-ABC$ 的三个侧面围成的几何体的体积为 M,则 M 的值为________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明,证明过程或演算步骤.

17.(本小题满分 10 分)

已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $8S_n=(a_n+2)^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)证明:数列$\{a_n\}$为等差数列;

(2)已知 $a_n=\log_{\sqrt{3}}b_n$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.(本小题满分 12 分)

某景区为了进一步优化旅游服务环境,强化服务意识,全面提升景区服务质量,准备从 6 个跟团游团队和 3 个私家游团队中随机抽取一些团队展开满意度调查,并将这些团队依次编号.

(1)若一次抽取两个号码,求这两个号码全是私家游团队的概率;

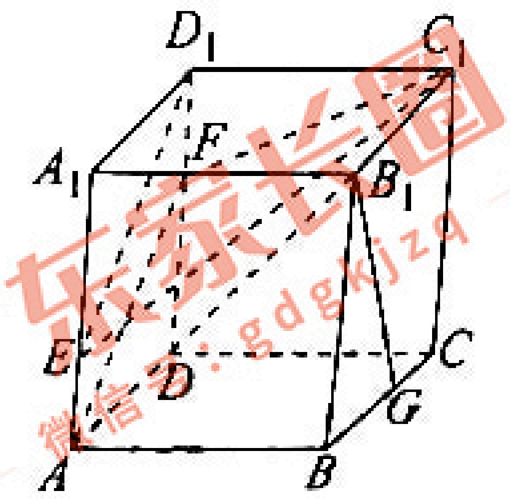
(2)假设有放回地一次性抽取 1 个号码,连续抽取 4 次,设 4 次抽到私家游团队的个数为 ξ,求 ξ 的分布列和数学期望.

19.(本小题满分 12 分)

如图,在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E,F,G 分别在棱 AA_1,DD_1,BC 上,$AE=D_1F=1$,$BG=2$.

(1)求证:$B_1G\perp$平面 C_1D_1E;

(2)求平面 C_1D_1E 与平面 AC_1F 所成的锐二面角的余弦值.

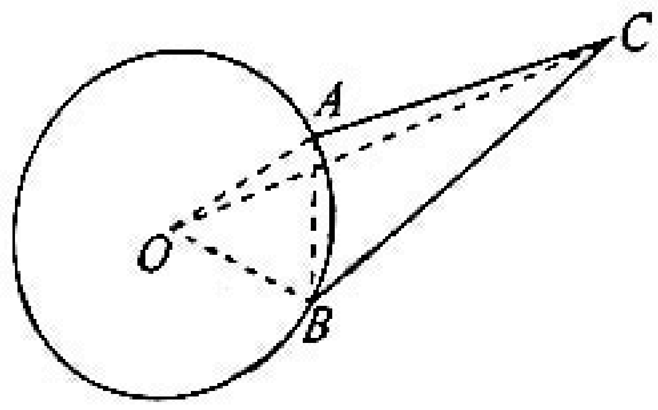


20.(本小题满分 12 分)

如图,均匀的圆面绕圆心 O 作逆时针方向的匀速旋转,圆面上一初始位置为 A 点,t 秒后转到点 B,旋转的角速度为 $\omega=\frac{\pi}{30}$(rad/s),在旋转圆面的右侧有一固定相机 C(C,O 两点分别在 AB 的异侧),且 $OA=5$ m,$AC=7$ m.

(1)记旋转角为 θ,若 $\theta\in((2n+1)\pi,2(n+1)\pi)(n\in\mathbf{N})$,求 t 的取值范围及弦 AB 的长度;

(2)在(1)的条件下,若 $t=110$ s,$BC=8$ m,求 OC 的长.



21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\cos x-\frac{1}{e^x}$.

(1)判断:函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 内零点的个数;

(2)证明:函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上存在两个不同的单调递增区间,一个单调递减区间.

$\left(\text{附}:7<e^2<8,e^3>16,e^{-\frac{3\pi}{4}}<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

22.(本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{5}{3}$,点 $A(a,0)$ 到渐近线的距离为 $\frac{12}{5}$.

(1)求双曲线的方程;

(2)若直线 l 与双曲线 C 交于 M,N 两点,且 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$,试探究直线 l 是否过定点?若过定点,求出该定点坐标;若不过定点,说明理由.