

2022—2023 衡水中学下学期高三年级五调考试

数 学

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。共 4 页，总分 150 分，考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x > -2\}$ ， $B = \{x | x^2 + 2x - 15 \geq 0\}$ ，则下列结论中正确的是
A. $A \subseteq B$ B. $A \cap B = \emptyset$ C. $C_R A \subseteq C_R B$ D. $(C_R A) \cap (C_R B) \neq \emptyset$
2. 某企业为了解员工身体健康情况，采用分层随机抽样的方法从该企业的营销部门和研发部门抽取部分员工体检。已知该企业营销部门和研发部门的员工人数之比是 4:1，且被抽到参加体检的员工中，营销部门的人数比研发部门的人数多 72，则参加体检的人数是
A. 90 B. 96 C. 120 D. 144
3. 已知 $z_1 = 1 + 2i$ ， $z_2 = \frac{3+i}{1+i}$ ， $z_3 = -1 - 2i$ 在复平面上对应的点是一个正方形的三个顶点，则这个正方形的第四个顶点所对应的复数 $z_4 =$
A. $2 - i$ B. $-2 + i$ C. $2 + i$ D. $-2 - i$
4. 在正方形 $ABCD$ 中， E, F 分别是边 AB, AD 上的点， $3AE = 2BE$ ， $\angle ECF = \frac{\pi}{4}$ ，则
A. $AD = \frac{3}{2}DF$ B. $AD = 2DF$ C. $AD = 3DF$ D. $AD = 4DF$
5. 李明开发的小程序发布经过 t 天后，用户人数 $A(t) = 500e^{kt}$ ，其中 k 为常数。已知小程序发布经过 10 天后有 2 000 名用户，则用户超过 50 000 名至少经过的天数为(取 $\lg 2 = 0.3$)
A. 31 B. 32 C. 33 D. 34
6. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 是 CC_1 的中点，动点 Q 在平面 DCC_1D_1 内（包括边界）。若 $AQ \parallel$ 平面 A_1BP ，则 AQ 的最小值是
A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{5}$
7. 若数列 $\{a_n\}$ 对任意正整数 n ，有 $a_{n+m} = a_n q$ (其中 $m \in N^*$ ， q 为常数， $q \neq 0$ 且 $q \neq 1$)，则称数列 $\{a_n\}$ 是以 m 为周期，以 q 为周期公比的类周期性等比数列。已知类周期性等比数列 $\{b_n\}$ 的前 4 项为 1, 1, 2, 3，周期为 4，周期公比为 3，则 $\{b_n\}$ 的前 25 项和为

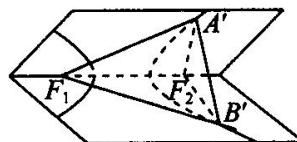
- A. 3 277 B. 3 278 C. 3 280 D. 3 282

8. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过点 F_2 作直线 $AB \perp F_1F_2$

交 C 于 A, B 两点. 现将 C 所在平面沿直线 F_1F_2 折成平面角为锐角 α 的二面角, 如图, 翻折后

A, B 两点的对应点分别为 A', B' , 且 $\angle A'F_1B' = \beta$. 若

$$\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \beta} = \frac{25}{16}, \text{ 则 } C \text{ 的离心率为}$$



- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 设 a, b 为正实数, 则下列命题正确的是

- A. 若 $a^2 - b^2 = 1$, 则 $a - b < 1$ B. 若 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = 1$, 则 $a - b < 1$
C. 若 $a > b + 1$, 则 $a^2 > b^2 + 1$ D. 若 $a \leq 1, b \leq 1$, 则 $|a - b| \geq |1 - ab|$

10. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 120° , 点 M 满足 $\angle AMB = \angle AMC = \angle BMC = 120^\circ$, 则点 M 到三角形三个顶点的距离之和最小, 点 M 被人们称为费马点. 根据以上性质, 已知 a 是平面内的任意一个向量, 向量 b, c 满足 $b \perp c$, 且 $|b| = 2|c| = 2\sqrt{3}$, 则 $|a - b| + |a - c| + |a + c|$ 的取值可以是

- A. 9 B. $4\sqrt{3}$ C. 6 D. $3\sqrt{3}$

11. “杨辉三角”是二项式系数在三角形中的一种几何排列, 在中国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书中就有出现, 如图所示, 在“杨辉三角”中, 除每行两边的数都是 1 外, 其余每个数都是其“肩上”的两个数之和, 例如第 4 行的 6 为第 3 行中两个 3 的和, 则下列说法中正确的是

第0行																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						</
-----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

- A. $C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_{10}^2 = 164$
B. 在第 2 022 行中第 1 011 个数最大

C. 记“杨辉三角”第 n 行的第 i 个数为 c_i , 则 $\sum_{i=1}^{n+1} (2^{i-1} c_i) = 3^n$

D. 第 34 行中第 15 个数与第 16 个数之比为 $2:3$

12. 已知函数 $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$, 则

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 的最大值大于 $\sqrt{2}$

C. $\forall x \in R, f(x-2\pi) = f(x)$

D. $\forall x \in [0, \pi], f(x+\pi) > 0$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

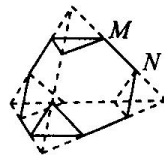
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设命题 $p: \forall x \in (\sqrt{2}, 2), x + \frac{2}{x} > a$. 若 $\neg p$ 是假命题, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 准线为 l , M 是 C 上的一点, 点 N 在 l 上. 若 $FM \perp FN$, 且 $|MF| = 10$, 则 $|NF| =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = m\sqrt{\ln x - \frac{1}{4}} + 2x + \frac{1}{2}n$ 在区间 $[2, 4]$ 上有零点, 则 $\sqrt{m^2 + n^2}$ 的最小值为_____.

16. 半正多面体亦称“阿基米德体”或“阿基米德多面体”, 是以边数不全相同的正多边形为面的多面体. 某半正多面体由 4 个等边三角形和 4 个正六边形构成, 其可由正四面体切割而成, 如图所示. 已知 $MN = 1$, 若在该半正多面体内放一个球, 则该球表面积的最大值为_____.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$, $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+1} + 2a_n^2$, 且 $3a_1, a_2 + 3, a_3$ 成等差数列.

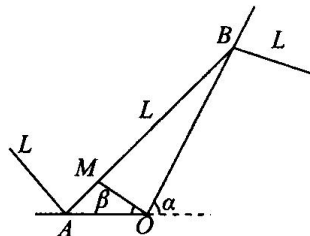
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数,} \\ \log_{\frac{1}{2}} a_n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

18. (12 分)

如图, 某城市有一条公路从正西方 AO 通过市中心 O 后转向东偏北 α 角方向的 OB , 位于该市的某大学 M 与市中心 O 的距离 $OM = 3\sqrt{13}$ km, 且 $\angle AOM = \beta$. 现要修筑一条铁路 L , L 在 OA 上设一站 A , 在 OB 上设一站 B , 铁路在 AB 部分为直线段, 且经过大学 M , 其中 $\tan \alpha = 2$, $\cos \beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $OA = 15$ km.

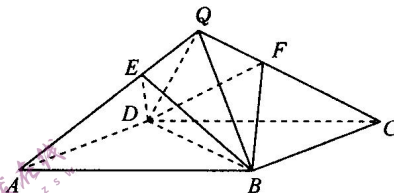
- (1) 求大学 M 与站 A 的距离 AM ;
- (2) 求铁路 AB 段的长 AB .



19. (12 分)

如图, 三棱锥 $E-ABD$ 和三棱锥 $F-BCD$ 均为棱长为 2 的正四面体, 且 A, B, C, D 四点共面, 记直线 AE 与 CF 的交点为 Q .

- (1) 证明: 平面 $BDQ \perp$ 平面 $ABCD$;
- (2) 求二面角 $A-DQ-C$ 的正弦值.



20. (12 分)

某校组织甲、乙、丙、丁、戊五位学生参加某大学的测试活动, 现有 A, B 两种不同的测试方案, 每位学生随机选择其中的一种方案进行测试. 选择 A 方案测试合格的概率为 $\frac{2}{3}$, 选择 B 方案测试合格的概率为 $\frac{1}{2}$, 且每位学生测试的结果互不影响.

- (1) 若甲、乙、丙三位学生选择 A 方案, 丁、戊两位学生选择 B 方案, 求恰有三位学生合格的概率;
- (2) 若测试合格的人数的均值不小于 3, 试写出选择 A 方案进行测试的学生的人数.

21. (12 分)

“工艺折纸”是一种把纸张折成各种不同形状物品的艺术活动，在我国源远流长．某些折纸活动蕴含丰富的数学内容，例如：用一张圆形纸片，按如下步骤折纸（如图①）．

步骤 1：设圆心是 E ，在圆内异于圆心处取一点，标记为 F ；

步骤 2：把纸片折叠，使圆周正好通过点 F ；

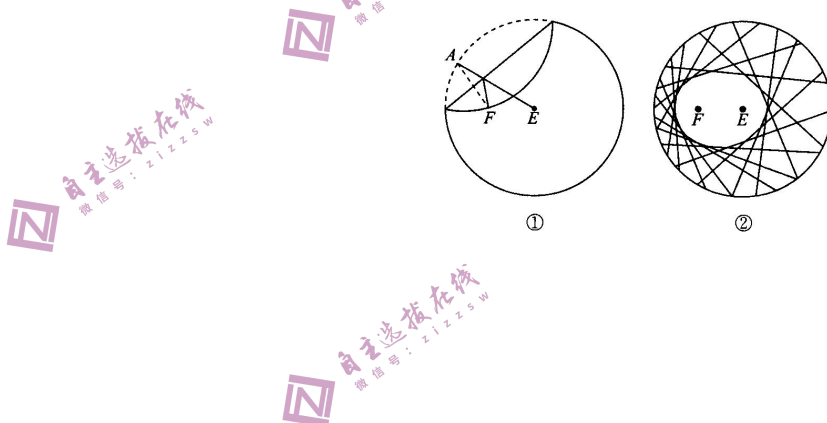
步骤 3：把纸片展开，并留下一道折痕；

步骤 4：不停地重复步骤 2 和 3，就能得到越来越多的折痕（如图②）．

已知这些折痕所围成的图形是一个椭圆．若取半径为 6 的圆形纸片，设定点 F 到圆心 E 的距离为 4，按上述方法折纸．以点 F, E 所在的直线为 x 轴，线段 EF 的中点为原点建立平面直角坐标系．

(1) 求折痕围成的椭圆的标准方程；

(2) 若过点 $Q(1,0)$ 且不与 y 轴垂直的直线 l ，与 (1) 中的椭圆交于 M, N 两点，在 x 轴的正半轴上是否存在定点 $T(t,0)$ ，使得直线 TM, TN 的斜率之积为定值？若存在，求出该定点和定值；若不存在，请说明理由．



22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^{ax} - ax (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ ．

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若不等式 $f(x) \geq \sin x - \cos x + 2 - ax$ 对任意 $x \geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．