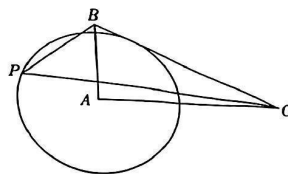




5. 已知直角三角形  $ABC$  中,  $\angle A=90^\circ$ ,  $AB=2$ ,  $AC=4$ , 点  $P$  在以  $A$  为圆心且与边  $BC$  相切的圆上, 则  $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$  的最大值为

- A.  $\frac{16+16\sqrt{5}}{5}$                       B.  $\frac{16+8\sqrt{5}}{5}$   
C.  $\frac{16}{5}$                                   D.  $\frac{56}{5}$



6. 已知  $a=0.75$ ,  $b=2\log_5 2$ ,  $c=\sin \frac{\pi}{5}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是

- A.  $c < b < a$                       B.  $b < c < a$                       C.  $c < a < b$                       D.  $a < c < b$

7. 若函数  $f(x) = \frac{e^x}{x^3} - a(\frac{3}{x} + \ln x)$  只有一个极值点, 则  $a$  的取值范围是

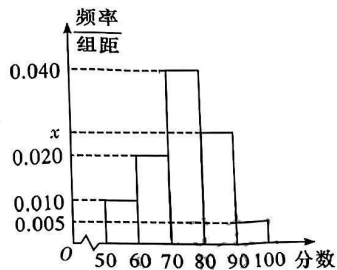
- A.  $(-\infty, \frac{e^2}{4}]$                       B.  $(-\infty, 0]$   
C.  $(-\infty, 0] \cup \{\frac{e^3}{9}\}$                       D.  $(-\infty, \frac{e^2}{4}] \cup \{\frac{e^3}{9}\}$

8. 已知双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  与抛物线  $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$  有公共焦点  $F$ , 过点  $F$  作双曲线一条渐近线的垂线, 垂足为点  $A$ , 延长  $FA$  与抛物线  $C_2$  相交于点  $B$ , 若点  $A$  为线段  $FB$  的中点, 双曲线  $C_1$  的离心率为  $e$ , 则  $e^2 =$

- A.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}+1}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{5}+2}{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 上级某部门为了对全市 36000 名初二学生的数学水平进行监测, 将获得的样本(数学水平分数)数据进行整理分析, 全部的分数可按照  $[50, 60)$ ,  $[60, 70)$ ,  $[70, 80)$ ,  $[80, 90)$ ,  $[90, 100]$  分成 5 组, 得到如图所示的频率分布直方图. 则下列说法正确的是



- A. 图中  $x$  的值为 0.025  
B. 估计样本数据的 80% 分位数为 84  
C. 由样本数据可估计全市初二学生数学水平分数低于 60 分的人数约为 360  
D. 由样本数据可估计全市初二学生数学水平分数 80 分及以上的人数占比为 3%

10. 一个质地均匀的正四面体表面上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 抛掷该正四面体两次, 记事件  $A$  为“第一次向下的数字为偶数”, 事件  $B$  为“两次向下的数字之和为奇数”, 则下列说法正确的是

- A.  $P(A) = \frac{1}{2}$                       B.  $P(B|A) = \frac{1}{2}$   
C. 事件  $A$  和事件  $B$  互为对立事件                      D. 事件  $A$  和事件  $B$  相互独立



18. (本小题满分 12 分)

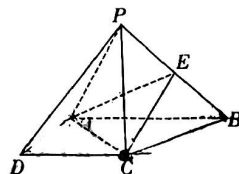
在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $\sqrt{3}a \sin B = 2b \cos^2 \frac{B+C}{2}$ .

- (1) 求角  $A$  的大小;  
(2) 若  $BC$  边上的中线  $AD=1$ , 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PC \perp$  底面  $ABCD$ , 四边形  $ABCD$  是直角梯形,  $AD \perp DC$ ,  $AB \parallel DC$ ,  $AB=2AD=2CD=2$ , 点  $E$  是  $PB$  的中点.

- (1) 证明: 平面  $EAC \perp$  平面  $PBC$ ;  
(2) 若直线  $PB$  与平面  $PAC$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 求二面角  $P-AC-E$  的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

某数学兴趣小组为研究本校学生数学成绩与语文成绩的关系, 采取有放回简单随机抽样, 从学校抽取样本容量为 200 的样本, 将所得数学成绩与语文成绩的样本观测数据整理如下:

		语文成绩		合计
		优秀	不优秀	
数学成绩	优秀	50	30	80
	不优秀	40	80	120
合计		90	110	200

- (1) 根据  $\alpha=0.010$  的独立性检验, 能否认为数学成绩与语文成绩有关联?  
(2) 在人工智能中常用  $L(B|A) = \frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$  表示在事件  $A$  发生的条件下事件  $B$  发生的优势, 在统计中称为似然比. 现从该校学生中任选一人,  $A$  表示“选到的学生语文成绩不优秀”,

数学试题(雅礼版) 第 4 页(共 5 页)



$B$  表示“选到的学生数学成绩不优秀”，请利用样本数据，估计  $L(B|A)$  的值；

- (3) 现从数学成绩优秀的样本中，按分层抽样的方法选出 8 人组成一个小组，从抽取的 8 人里再随机抽取 3 人参加数学竞赛，求这 3 人中，语文成绩优秀的人数  $X$  的概率分布列及数学期望。

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$\alpha$	0.050	0.010	0.001
$\chi_{\alpha}^2$	3.841	6.635	10.828

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆具有如下光学性质：从椭圆的一个焦点发出的光线射向椭圆上任一点，经椭圆反射后必经过另一个焦点。若从椭圆  $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点  $F_1$  发出的光线，经过两次

反射之后回到点  $F_1$ ，光线经过的路程为 8，椭圆  $T$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆  $T$  的标准方程；

(2) 设  $D(x_D, 0)$ ，且  $x_D > a$ ，过点  $D$  的直线  $l$  与椭圆  $T$  交于不同的两点  $M, N$ ，点  $F_2$  是椭圆  $T$  的右焦点，且  $\angle DF_2M$  与  $\angle DF_2N$  互补，求  $\triangle MNF_2$  面积的最大值。

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^x - \frac{1}{6}ax^3$  ( $a$  为非零常数)，记  $f_{n+1}(x) = f_n'(x) (n \in \mathbb{N})$ ， $f_0(x) = f(x)$ 。

(1) 当  $x > 0$  时， $f(x) \geq 0$  恒成立，求实数  $a$  的最大值；

(2) 当  $a = 1$  时，设  $g_n(x) = \sum_{i=2}^n f_i(x)$ ，对任意的  $n \geq 3$ ，当  $x = t_n$  时， $y = g_n(x)$  取得最小值，证

明： $g_n(t_n) > 0$  且所有点  $(t_n, g_n(t_n))$  在一条定直线上。

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

