百校联盟 2021届普通高中教育教学质量监测考试

全国卷　文科数学

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分150分，测试时间120分钟.
5. 考试范围：必修1~5，选修1-1，1-2.

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $z=2-i$，则 $|z^2-z|=$

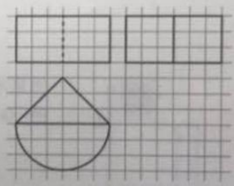
A. 3　　B. 2　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\sqrt{26}$

2. 设集合 $A=\{x|(2x+1)(x-3)>0\}$，$B=\{-1,0,2,4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,4\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{0,2\}$　　D. $\{0,2,4\}$

3. 我国古代的宫殿金碧辉煌，设计巧夺天工，下图(1)为北京某宫殿建筑，图(2)为该宫殿某一"柱脚"的三视图，其中小正方形的边长为1，则根据三视图可知，该"柱脚"的表面积为

图(1)



图(2)

A. $9\pi+9\sqrt{2}+9$　　B. $18\pi+18\sqrt{2}+9$

C. $18\pi+18\sqrt{2}+18$　　D. $18\pi+9\sqrt{2}+18$

4. 从3，5，7，9，10中任取3个数作为边长，不能够围成三角形的概率为

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{7}{10}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

5. 已知两个随机变量 x,y 呈现非线性关系. 为了进行线性回归分析，设 $u=2\ln y$，$v=(2x-3)^2$，利用最小二乘法，得到线性回归方程 $u=-\frac{1}{3}v+2$，则

A. 变量 y 的估计值的最大值为 e　　B. 变量 y 的估计值的最小值为 e

C. 变量 y 的估计值的最大值为 e^2　　D. 变量 y 的估计值的最小值为 e^2

6. 已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{5}{2}x$，且过点(3，8)，则双曲线 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{29}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{29}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

7. 已知曲线 $y=4x^2-\ln x+2$ 的一条切线的斜率为7，则该切线的方程为

A. $y=7x+1$　　B. $y=7x-1$

C. $y=7x-2$　　D. $y=7x-3$

8. 已知函数 $f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，若 $f(-\frac{\pi}{3})=3$，$f(\frac{\pi}{3})=0$，则 ω 的最小值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. 2　　D. 3

9. 已知 $a=9^{\frac{1}{3}}$，$b=(10)^{\frac{1}{4}}$，$c=5^{\log_5\frac{1}{3}}$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

10. 已知角 α 的顶点在原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边过点 $(1,m)$，其中 $m>0$；若 $\tan2\alpha=-\frac{12}{5}$，则 $\cos(2\alpha+m\pi)=$

A. $-\frac{6}{13}$　　B. $-\frac{12}{13}$　　C. $\frac{6}{13}$　　D. $\frac{12}{13}$

11. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_n>0$，且 $\frac{S_{2n}}{S_n}\leqslant2$，则等比数列公比 q

A. 有最大值，无最小值　　B. 有最小值，无最大值

C. 有最大值也有最小值　　D. 无最大值也无最小值

12. 已知三棱锥 $S-ABC$ 中，$\triangle SBC$ 为等腰直角三角形，$\angle BSC=\angle ABC=90°$，$\angle BAC=2\angle BCA$，$D,E,F$ 分别为线段 AB,BC,AC 的中点，则直线 SA,SB,AC,SD 中，与平面 SEF 所成角为定值的有

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13. 若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+2\geqslant0\\x-y\leqslant0\\x+y-3\leqslant0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为________.

14. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=3$，若 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 -3，则 $|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=$________.

15. 圆 $C: x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 上的点到直线 $x+2y-14=0$ 距离的最大值为________.

16. 已知首项为 1 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $2S_n=(n+1)a_n$，则数列 $\{\frac{1}{a_{2n-1}\cdot a_{2n+1}}\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和 $T_n=$________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$b-\frac{5a\cos C}{c}=5\cos A$.

(1) 求 c；

(2) 若 $b=7$，$B=\frac{\pi}{3}$，点 M 在线段 BC 上，$AM=5$，求 $\angle MAC$ 的余弦值.

18.(本小题满分12分)

已知数列$\{a_n\}$满足$a_2=2a_1=4$,且$a_{n+1}-b_n=2a_n$,数列$\{b_n\}$是公差为-1的等差数列.

(1)探究:数列$\{a_n-n\}$是等差数列还是等比数列,并说明理由;

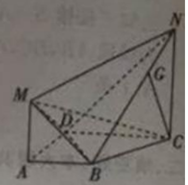
(2)求使得$a_1+a_2+\cdots+a_n>2200$成立的最小正整数n的值.

19.(本小题满分12分)

如图,多面体$ABCDMN$中,$\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$,$MA\perp$平面$ABCD$,$NC\perp$平面$ABCD$,且$AB=AD=MA=\frac{1}{2}CD=2$.

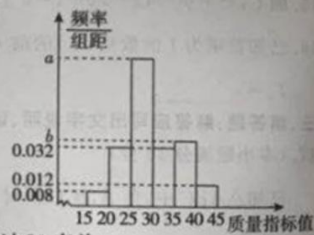
(1)设G是线段BN上的点,求证$BD\perp CG$;

(2)求点B到平面MCD的距离.



20.(本小题满分12分)

某工厂用A机器生产了10000件产品,根据该产品某种质量指标值的有关数据得到如右直方图,若任取1件产品,该质量指标值在$[30,45]$的频率为0.4.



(1)求a,b的值;

(2)求产品质量指标值的中位数以及平均数;

(3)为了调查A,B两种机器生产的产品的质量指标是否有差异,研究人员用B机器也生产了10000件产品,所得数据如下所示,判断是否有99%的把握认为A,B两种机器生产的产品的质量与质量指标是否超过30有关.

	A机器生产产品	B机器生产产品
质量指标不超过30		5000
质量指标超过30		5000

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-mx$.

(1)若 $m>0$，求函数 $f(x)$ 的极值；

(2)若 $m=1$，证明：$f(x)>\ln x-x+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

22.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若过点 $D(-\frac{1}{3},0)$ 且斜率不为 0 的直线与椭圆 C 交于 P,Q 两点，点 $A(1,0)$，求证：$AP\perp AQ$.

2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国卷　文科数学　参考答案

1. C 【解析】依题意，$z^2=(2-i)^2=3-4i$，故 $|z^2-z|=|3-4i-2+i|=|1-3i|=\sqrt{10}$.

2. A 【解析】依题意，$A=\{x|x<-\frac{1}{2}$ 或 $x>3\}$；故 $A\cap B=\{-1,4\}$.

3. C 【解析】根据“柱脚”的三视图可知，该“柱脚”是由半圆柱和一个三棱柱组合而成，故所求表面积 $S=\pi\times3\times3+\pi\times3^2+6\times3+3\sqrt{2}\times3\times2=18(\pi+\sqrt{2}+1)$.

4. A 【解析】依题意，所有的情况为(3,5,7)，(3,5,9)，(3,5,10)，(3,7,9)，(3,7,10)，(3,9,10)，(5,7,9)，(5,7,10)，(5,9,10)，(7,9,10)，其中满足条件的为(3,5,9)，(3,5,10)，(3,7,10)，故所求概率 $P=\frac{3}{10}$.

5. A 【解析】依题意，$2\ln y=-\frac{1}{3}(2x-3)^2+2$，则 $\ln y=-\frac{1}{6}(2x-3)^2+1$，则 $y=e^{-\frac{1}{6}(2x-3)^2+1}$，故当 $x=\frac{3}{2}$ 时，变量 y 的最大值的估计值为 e.

6. B 【解析】设双曲线 C 的方程为 $25x^2-4y^2=\lambda(\lambda\neq0)$，将(3,8)代入 C 中，则 $\lambda=25\times9-4\times64=-31$，故双曲线 C 的焦点在 y 轴上，则双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{29}}{5}$.

7. B 【解析】设切点坐标为 (x_0,y_0)，则 $y'=8x-\frac{1}{x}$，故 $8x_0-\frac{1}{x_0}=7$，解得 $x_0=1$（$x_0=-\frac{1}{8}$ 舍去），故 $y_0=4+2=6$，故所求切线方程为 $y-6=7(x-1)$，即 $y=7x-1$.

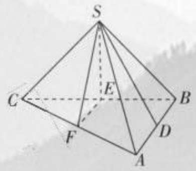
8. B 【解析】依题意，$f(-\frac{\pi}{3})=3$，$f(\frac{\pi}{3})=0$，故 $\frac{T}{4}+k\cdot\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{3})$，即 $\frac{(2k+1)T}{4}=\frac{2\pi}{3}$，故 $\frac{(2k+1)}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$，解得 $\omega=\frac{3(2k+1)}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$；因为 $\omega>0$，故 ω 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

9. C 【解析】依题意，$a=9^{\frac{2}{3}}=81^{\frac{1}{3}}>b$，$b=(10)^{\frac{1}{3}}>1$；而 $c=5^{\log_5\frac{1}{3}}\in(0,1)$，故 $c<b$，故 $a>b>c$.

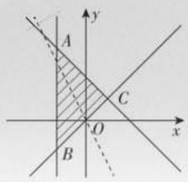
10. D 【解析】依题意，$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{12}{5}$，解得 $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$ 或 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$；因为 $m>0$，故 $\tan\alpha=\frac{3}{2}=m$，则 $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$，故 $\cos(2\alpha+\frac{3}{2}\pi)=\sin2\alpha=\frac{12}{13}$.

11. A 【解析】依题意，当 $q=1$ 时，$S_{2n}\leqslant2S_n$ 显然成立；当 $q\neq1$ 时，$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}\leqslant\frac{2a_1(1-q^n)}{1-q}$，则 $1+q^n\leqslant2$，因为 $q>0$，故 $0<q<1$；综上所述，$0<q\leqslant1$.

12. B 【解析】作出图形如右所示；因为 E，F 分别为线段 BC，AC 的中点，故 $EF\parallel AB$，则 $EF\perp BC$；而 $CS=BS$，则 $SE\perp BC$，$SE\cap EF=E$，故 $BC\perp$ 平面 SEF，故 BS 与平面 SEF 所成角为 $\angle BSE$，大小为 45°，AC 与平面 SEF 所成的角为 $\angle CFE=\angle A=60^\circ$，由于平面 SBC 与平面 ABC 的位置关系未知，故 SA，SD 与平面 SEF 所成的角不为定值.



13. $\frac{9}{2}$ 【解析】不等式组所表示的平面区域如图中阴影部分所示；观察可知，当直线 $z=2x+y$ 过点 C 时，z 有最大值；联立 $\begin{cases}x-y=0\\x+y-3=0\end{cases}$，解得 $x=y=\frac{3}{2}$，故 $z=2x+y$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$.



14. $\sqrt{73}$ 【解析】依题意，$|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-3$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{3}{5}$，故 $|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{100-108+81}=\sqrt{73}$.

15. $2\sqrt{5}+2$ 【解析】依题意，圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=4$，故圆心 $(2,1)$ 到直线 $x+2y-14=\frac{|2+2-14|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$，故所求距离最大值为 $2\sqrt{5}+2$.

16. $\frac{n}{2n+1}$ 【解析】$\because 2S_n=(n+1)a_n$，$\therefore 2S_{n-1}=na_{n-1}(n\geqslant 2)$，$\therefore 2S_n-2S_{n-1}=(n+1)a_n-na_{n-1}\,(n\geqslant 2)$，$\therefore 2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$，即 $(n-1)a_n=na_{n-1}$，$\therefore \frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}(n\geqslant 2)$，故 $a_n=n$，而 $n\geqslant 2$，故 $T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$.

17.【解析】(1) 依题意，$b-\frac{5\sin A\cos C}{\sin C}=5\cos A$，…… 1 分

故 $b\sin C-5\sin A\cos C=5\cos A\sin C$，…… 2 分

则 $c\sin B=5(\cos A\sin C+\sin A\cos C)=5\sin B$，…… 4 分

因为 $\sin B\neq 0$，故 $c=5$. …… 5 分

(2) 因为 $B=\frac{\pi}{3}$，故 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=25+a^2-2\cdot 5a\cdot\cos\frac{\pi}{3}=49$，

故 $a^2-5a-24=0$，因为 $a>0$，故 $a=8$； …… 7 分

在 $\triangle ABM$ 中，$B=\frac{\pi}{3}$，$AM=AB$，故 $\triangle ABM$ 是等边三角形，

故 $BM=AB=5$，$MC=3$， …… 9 分

故 $\cos\angle MAC=\frac{AM^2+AC^2-MC^2}{2AM\cdot AC}=\frac{25+49-9}{2\times5\times7}=\frac{13}{14}$. …… 10 分

18.【解析】依题意，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，

当 $n=1$ 时，$a_2=2a_1+b_1$，即 $4=4+b_1$，故 $b_1=0$， …… 1 分

则 $b_n=0+(n-1)\cdot(-1)=-n+1$，故 $a_{n+1}=2a_n-n+1$，…… 3 分

故 $\frac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=\frac{2a_n-n+1-(n+1)}{a_n-n}=\frac{2(a_n-n)}{a_n-n}=2$， …… 5 分

而 $a_1-1=1$，故 $\{a_n-n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列. …… 6 分

(2) 由 (1) 可知，$a_n-n=2^{n-1}$，故 $a_n=n+2^{n-1}$， …… 7 分

记 $a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$，

故 $S_n=(1+2+\cdots+n)+(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})=\frac{n(1+n)}{2}+\frac{1-2^n}{1-2}=\frac{n^2+n}{2}+2^n-1$. …… 9 分

因为 $S_{11}=2113<2200$，$S_{12}=4173>2200$， …… 11 分

而 $\{S_n\}$ 是递增数列，故满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n>2200$ 的最小正整数 n 的值为 12. …… 12 分

19.【解析】(1) 证明：由已知可得 $BD=2\sqrt{2}$，

由余弦定理，$BC=\sqrt{BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos45^\circ}=2\sqrt{2}$，

$\therefore BD^2+BC^2=CD^2$，$\therefore BD\perp BC$； …… 3 分

$\because NC\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BD\perp NC$； …… 4 分

$NC\cap BC=C$，$BC\subset$ 平面 BCN，$NC\subset$ 平面 BCN，$\therefore BD\perp$ 平面 BCN； …… 5 分

$\because CG\subset$ 平面 BCN，$\therefore BD\perp CG$. …… 6 分

(2) 依题意，$MA\perp CD$，$\because\angle ADC=90^\circ$，故 $AD\perp CD$，

又 $MA\subset$ 平面 MAD，$AD\subset$ 平面 MAD，$MA\cap AD=A$，故 $CD\perp$ 平面 MAD； …… 8 分

又 $MD \subset$ 平面 MAD，$\therefore CD \perp DM$，即 $\triangle MCD$ 为直角三角形；…………………………………… 9 分

设点 B 到平面 MCD 的距离为 h，则 $V_{B-CDM}=V_{M-BCD}$，即 $\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle CDM}=\frac{1}{3}\cdot AM\cdot S_{\triangle BCD}$，

$\therefore h=\dfrac{AM\cdot S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle CDM}}=\dfrac{AM\cdot \frac{1}{2}\cdot CD\cdot AD}{\frac{1}{2}\cdot CD\cdot DM}=\dfrac{2\times 4}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，……………………………………

$\therefore$ 点 B 到平面 MCD 的距离为 $\sqrt{2}$. …………………………………… 12 分

20.【解析】(1) 依题意，$0.16+5b+0.06=0.4$，故 $b=0.036$，…………………………………… 1 分

而 $0.04+0.16+5a+0.16+0.18+0.06=1$，解得 $a=0.08$. …………………………………… 3 分

(2) 依题意，所求中位数为 $25+\dfrac{0.5-0.2}{0.08}=28.75$，…………………………………… 5 分

平均数为 $17.5\times 0.04+22.5\times 0.16+27.5\times 0.4+32.5\times 0.16+37.5\times 0.18+42.5\times 0.06=0.7+3.6+11+5.2+6.75+2.55=29.8$；…………………………………… 8 分

(3) 本次实验中，K^2 的观测值 $k_0=\dfrac{20000\times(6000\times 5000-4000\times 5000)^2}{10000\times 10000\times 9000\times 11000}\approx 202.020>6.635$，……… 11 分

故有 99% 的把握认为 A、B 两种机器生产的产品的质量具有差异性. …………………………………… 12 分

21.【解析】(1) 依题意，$f'(x)=e^x-m$，…………………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln m$，…………………………………… 2 分

故当 $x\in(-\infty,\ln m)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(\ln m,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，

故函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(\ln m)=m-m\ln m$，无极大值；…………………………………… 5 分

(2) 解法一：令 $h(x)=e^x-\ln x-2(x>0)$，$h'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，为增函数，$h'(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，$h'(1)=e-1>0$，

$\therefore \exists x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使 $h'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2$，$\because e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\therefore x_0=-\ln x_0$，$\because h(x_0)=\frac{1}{x_0}+x_0-2>0$，所以原不等式成立.

…………………………………… 12 分

解法二：要证：$f(x)>\ln x-x+2$，即证：$e^x-x>\ln x-x+2$，即证：$e^x>\ln x+2$；

下面先证：$e^x-x-1>0(x>0)$，

令 $g(x)=e^x-x-1(x>0)$，由 (1) 可知，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数. …………………………………… 7 分

故 $g(x)>g(0)=0$，即 $e^x-x-1>0$①；…………………………………… 8 分

再证：$x-1\geqslant\ln x$，即 $x-1-\ln x\geqslant 0(x>0)$，

令 $\varphi(x)=x-1-\ln x$，则 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

$\varphi'(x)=0\Rightarrow x=1$. 故 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，在 $(1,+\infty)$ 上是增函数，…………………………………… 10 分

则 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=0$，即 $x-1-\ln x\geqslant 0$.

所以 $x-1\geqslant\ln x$②；…………………………………… 11 分

由①②得 $e^x>\ln x+2$，故 $f(x)>\ln x-x+2$ 在 $(0,+\infty)$ 成立. …………………………………… 12 分

22.【解析】(1) 依题意，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}$，…………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a^2=2\\ b^2=1\end{cases}$，…………………………………… 4 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{2}+x^2=1$. …………………………………… 5 分

(2)当斜率不为零时，设过点$\left(-\frac{1}{3},0\right)$直线为$x=ty-\frac{1}{3}$，…………………… 6 分

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases} x=ty-\frac{1}{3} \\ \frac{y^2}{2}+x^2=1 \end{cases}$，得$(9+18t^2)y^2-12ty-16=0$，且$\Delta>0$.

则$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{12t}{9+18t^2} \\ y_1y_2=-\frac{16}{9+18t^2} \end{cases}$，…………………… 8 分

又因为$\overrightarrow{AP}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{AQ}=(x_2-1,y_2)$，…………………… 9 分

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=\left(ty_1-\frac{4}{3}\right)\left(ty_2-\frac{4}{3}\right)+y_1y_2=(1+t^2)y_1y_2-\frac{4}{3}t(y_1+y_2)+\frac{16}{9}=(1+t^2)\frac{-16}{9+18t^2}-\frac{4t}{3}\cdot\frac{12t}{9+18t^2}+\frac{16}{9}=0$，…………………… 11 分

所以$AP\perp AQ$.…………………… 12 分