第 4 届刘徽杯第 4 题解答

褚 小 光

题目 给定整数$n\ge 3$，若不全为零的实数$a_i(1\le i\le n,\ n\ge 3)$满足$\sum_{i=1}^{n}a_i=0$，证明：

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{n}\right)^7\ge\frac{(n-1)^5}{(n-2)^2(n^2-n+1)^2(n^2-3n+3)^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^7}{n}\right)^2. \tag{1}$$

证明 设$k>0$，记$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n(n-1)k^2$，构造二次函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2-(x-a_i)^2=(n-1)x^2+2a_ix+n(n-1)k^2-a_i^2.$$

由判别式得

$$(n-1)\left[n(n-1)k^2-a_i^2\right]\ge a_i^2\Leftrightarrow(n-1)^2k^2\ge a_i^2\Rightarrow|a_i|\le(n-1)k,$$

故$a_i\in[-(n-1)k,\ (n-1)k]$.

因为$a_i\in[-(n-1)k,\ (n-1)k]$，$n\ge 3$，故

$$P=a_i^4+(n-3)ka_i^3+(n^2-4n+6)k^2a_i^2+(n^3-5n^2+10n-10)k^3a_i$$
$$+(n^4-6n^3+15n^2-20n+15)k^4>0,$$
$$Q=a_i^4-(n-3)ka_i^3+(n^2-4n+6)k^2a_i^2-(n^3-5n^2+10n-10)k^3a_i$$
$$+(n^4-6n^3+15n^2-20n+15)k^4>0.$$

(1) 当$\sum_{i=1}^{n}a_i^7>0$，有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+k)^2\left[a_i-(n-1)k\right]P\le 0. \tag{A}$$

因为$\sum_{i=1}^{n}a_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n(n-1)k^2$，式(A)展开整理为

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^7\le(n^5-7n^4+21n^3-35n^2+35n-21)k^5$$
$$\times\sum_{i=1}^{n}a_i^2+n(n-1)(n^4-6n^3+15n^2-20n+15)k^7$$
$$=k^5(n^5-7n^4+21n^3-35n^2+35n-21)$$
$$\times\sum_{i=1}^{n}a_i^2+k^5(n^4-6n^3+15n^2-20n+15)\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$
$$=(n-2)(n^2-n+1)(n^2-3n+3)k^5\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

上式两边平方得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^7\ge\frac{n^5(n-1)^5}{(n-2)^2(n^2-n+1)^2(n^2-3n+3)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^7\right)^2.$$

当$n-1$个a_i为$-k$，最后一个a_i为$(n-1)k$时取等号.

(2) 当$\sum_{i=1}^{n}a_i^7<0$，有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-k)^2\left[a_i+(n-1)k\right]Q\ge 0. \tag{B}$$

因为$\sum_{i=1}^{n}a_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n(n-1)k^2$，式(B)展开整理为

$$-\sum_{i=1}^{n}a_i^7\le(n^5-7n^4+21n^3-35n^2+35n-21)k^5$$
$$\times\sum_{i=1}^{n}a_i^2+n(n-1)(n^4-6n^3+15n^2-20n+15)k^7$$
$$=k^5(n^5-7n^4+21n^3-35n^2+35n-21)$$
$$\times\sum_{i=1}^{n}a_i^2+k^5(n^4-6n^3+15n^2-20n+15)\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$
$$=(n-2)(n^2-n+1)(n^2-3n+3)k^5\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

上式两边平方得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^7\ge\frac{n^5(n-1)^5}{(n-2)^2(n^2-n+1)^2(n^2-3n+3)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^7\right)^2.$$

当$n-1$个a_i为k，最后一个a_i为$-(n-1)k$时取等号.

第 5 题 是否存在正整数 $n \geq 2$, 使得对任何正整数 m 以及任意满足下列 3 个条件的多重集 $\mathcal{A}$, 都存在 $\mathcal{A}$ 的非空真子集 $\mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{B}$ 中所有元素之和为 m 的倍数?

- $\mathcal{A}$ 中互不相同的元素不超过 $n+2$ 个.
- $\mathcal{A}$ 中所有元素之和为 mn.
- 对任意的 $x \in \mathcal{A}$, x 是正整数且 $x \mid m$.

若存在, 请求出最小的满足上述条件的正整数 n; 否则请证明这样的 n 不存在.

注:

- 对多重集的元素求和时, 重复的元素需按照其重数累加.
- 多重集 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 子集是指对任意的 $x \in \mathcal{B}$ 都有 $x \in \mathcal{A}$, 并且 x 在 $\mathcal{B}$ 中的重数不超过 x 在 $\mathcal{A}$ 中的重数.

第 4 届刘徽杯第 6 题解答

陈 嘉 昊

题目 给定正整数 $t\geq 3$. 若无向图 G 有 $2t$ 个顶点，且满足以下性质，则称 G 为好图：

- 从 G 中任取 t 个顶点，其中总存在两个顶点可以被 G 的边相连.
- 无法将 G 的顶点等分成两组，使得这两组之间没有 G 的边相连.

求好图的边数的最小值.

定义一个图的分支序列为其各连通分支的顶点数目从小到大排列构成的序列. 求出使得边数达到最小的好图所有可能的分支序列.

解答 t 为偶数时，边数最小值为 $\frac{3t}{2}+1$，取等时可能的分支序列为 $\underbrace{2,2,\cdots,2}_{\frac{t}{2}-1},a,b\,(a+b=t+2,\ a,b$ 为奇数)；t 为奇数时，边数最小值为 $t+4$，取等时可能的分支序列为 $\underbrace{2,2,\cdots,2}_{t-3},6$ 或 $\underbrace{2,2,\cdots,2}_{t-2},4$，$t=5$ 时还可能为 $3,3,4$ 或 $1,3,3,3$.

方便起见，我们将可以将顶点等分成两组，两组之间没有边相连的图称为“可二分的”；我们称两两不相邻的 k 个顶点为一个 $k-$独立集；我们称恰有一个环路的连通图为单圈图. 证明中需要多次用到的结论我们在下面列出.

引理 1 (turan 定理)设正整数 $n\geq t\geq 2$，则不含 t 阶完全子图的 n 阶图至多有 $C_n^2-\sum_{i=1}^{t-1}C_{n_i}^2$ 条边，其中 $n=n_1+\cdots+n_{t-1}$，且 $|n_i-n_j|\leq 1$ $(1\leq i\leq j\leq t-1)$. 进一步的，不含 t 阶完全子图，有 $C_n^2-\sum_{i=1}^{t-1}C_{n_i}^2$ 条边的 n 阶图一定是完全 $t-1$ 部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_{t-1}}$.

引理 2 n 阶树中必有 $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-$独立集，$n$ 阶单圈图中必有 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-$独立集.

引理 3 如果 $2t$ 阶图 G 不是可二分的，且有一个连通分支 T 是 k 阶树(k 为奇数)，一个 l 阶连通分支 B 不是树. 我们按如下方式将 G 变成 G'：

1. 如果 B 是奇数阶单圈图，用 P_{k+l} 替换 $T\cup B$

2. 否则从 B 中移走一条边(保持 B 连通的前提下)，用 k 阶圈替换 T

则 G' 也不是可二分的，且其最大独立集的顶点数不会多于 G 的.

引理 4 设正整数 $a_1,\cdots,a_m$ 之和为 b，且 $m>[b/2]$，则对任意正整数 $k<b$，都存在子集 $I\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $k=\sum_{i\in I}a_i$.

上述引理要么是经典定理，要么较为显然，就不在此赘述证明. 下面我们开始本题的证明：

一、t 为偶数时，我们断言边数的最小值为 $\frac{3t}{2}+1$，且唯一满足条件的图为 $(\frac{t}{2}-1)K_2\cup H_a\cup H_b$，其中 a,b 为奇数，$a+b=t+2$，H_a,H_b 为单圈图. 容易验证 $(\frac{t}{2}-1)K_2\cup H_a\cup H_b$ 满足条件，且去掉任一条边之后都含有 $t-$独立集，故我们只需证满足条件的边数为 $\frac{3t}{2}+1$ 的图必与 $(\frac{t}{2}-1)K_2\cup H_a\cup H_b$ 同构即可.

设 G 恰有 $\frac{3t}{2}+1$ 条边，且满足题设条件，则 G 至少有 $\frac{t}{2}-1$ 个连通分支是树(假设 G 有 k 个连通分支是树，分别有 $a_1,\cdots,a_k$ 个顶点，另有 l 个连通分支中至少有一个圈，分别有 $b_1,\cdots,b_l$ 个顶点，则 G 的边数至少为 $a_1+\cdots+a_k-k+b_1+\cdots+b_l=2t-k$，由 $\frac{3t}{2}+1\geq 2t-k$ 知 $k\geq\frac{t}{2}-1$). 另一方面，由引理 2 知 G 至少有 $\frac{t}{2}+1$ 个连通分支.

如果 G 中至少有 $\frac{t}{2}$ 个偶数阶的连通分支，不妨设其阶数为 $2m_1,\cdots,2m_{t/2}$，由抽屉原理知一定存在子集 $I\subseteq\{1,2,\cdots,t/2\}$ 使得 $\frac{t}{2}\mid\sum_{i\in I}m_i$，又由 $\sum_{i=1}^{t/2}m_i<2t$ 知 $\sum_{i\in I}2m_i=t$，这与 G 不可二分矛盾. 故 G 中至多有 $\frac{t}{2}-1$ 个偶数阶的连通分支. 下面我们分情况讨论：

1. 若 G 的连通分支中没有奇数阶树，则其中恰好有 $\frac{t}{2}-1$ 个偶数阶树，且其余连通分支都是奇数阶的，另外如果 G 中有至少 4 个奇数阶连通分支，我们可以将其中两个暂时“合并”成一个连通分支，套用刚才的证明可以得到这与 G 不可二分矛盾，故 G 恰有两个奇数阶连通分支，由于它们不是树，计算边数可知它们一定都是单圈图.

设这 $\frac{t}{2}-1$ 个偶数阶树的阶数为 $2m_1,\cdots,2m_{t/2-1}$，若有某一个 $m_i>1$，则 $\sum_{i=1}^{t/2-1}2m_i\geq t$，而 $\sum_{i=1}^{t/2-1}2m_i\leq 2t-6$，由引理 4 知存在子集 $I\subseteq\left\{1,2,\cdots,\frac{t}{2}-1\right\}$ 使得 $\sum_{i\in I}m_i=\frac{t}{2}$，矛盾，故只能有 $G=(\frac{t}{2}-1)K_2\cup H_a\cup H_b$.

2. 若 G 的连通分支中没有奇数阶树，我们可以对其重复使用引理 3 中的变形，直到 G 中每个连通分支都不是奇数阶树(容易看出在这个过程中不可能所有连通分支都是树，故这个变形一定可以进行下去)，记得到的图为 G'，由前可知：$G'=(\frac{t}{2}-1)K_2\cup H_a\cup H_b$，下面我们考虑引理 3 中的逆变形，由于 $(\frac{t}{2}-1)K_2\cup H_a\cup H_b$ 不存在某个连通分支是长度超过 3 的路，故不可能进行第一种逆变形.

如果要进行第二种逆变形，需要某个连通分支，不妨设为 H_a 是奇数阶圈，此时经过一次逆变形 $(\frac{t}{2}-1)K_2\cup H_a\cup H_b$ 变为 $(\frac{t}{2}-1)K_2\cup T\cup H_b'$，其中 T 是 a 阶树，H_b' 由 H_b 添加一条边得到，注意到 H_b' 的最大独立集顶点数至多比 H_b 的少 1，由引理 2 知 $(\frac{t}{2}-1)K_2\cup T\cup H_b'$ 中存在 $t-$独立集，矛盾.

综上所述，t 为偶数时，我们断言边数的最小值为 $\frac{3t}{2}+1$，此时 G 一定同构于 $(\frac{t}{2}-1)K_2\cup H_a\cup H_b$.

二、t 为奇数时，如果 $2t$ 阶图 G 有不超过 $t+3$ 条边，且满足题设条件，即其补图中不含 K_t，由引理 1 知 $G=2K_3\cup(t-3)K_2$ (即 $K_{3,3,2,2,\cdots,2}$ 的补图)，但此时 G 显然是可二分的.

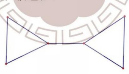
下面假设 $2t$ 阶图 G 恰有 $t+4$ 条边，且满足题设条件，注意到每个 k 阶的连通分支至少有 $k-1$ 条边，故 G 至少有 $t-4$ 个连通分支，而如果 G 恰有有 $t-4$ 个连通分支，则每个连通分支都是树，由引理 2 知其中一定存在 $t-$独立集，矛盾. 另一方面，由 G 中不存在 $t-$独立集知至多有 $t-1$ 个连通分支，下面我们分情况讨论：

1. 若所有联通分支中的树都是 K_2

1a. G 有 $t-3$ 个连通分支，则 $G=(t-4)K_2\cup F$，其中 F 是一个 8 阶单圈图，由引理 2 知其中一定存在 $t-$独立集，矛盾.

1b. G 有 $t-2$ 个连通分支，若 $G=(t-4)K_2\cup A\cup B$，其中 A,B 都不是树，若 A,B 都是偶数阶图，由引理 2 知其中一定存在 $t-$独立集，矛盾. 若 A,B 都是奇数阶图(只能是 3, 5 阶)，此时 G 是可二分的，矛盾.

若 $G=(t-3)K_2\cup A$，则 A 是有 7 条边的 6 阶图，则 A 只要不含 $3-$独立集即可，这样的 A 存在且唯一：



1c. G 有 $t-1$ 个连通分支，由于 G 不含 $t-$独立集，故每个连通分支都得是完全图，此时 $G=(t-2)K_2\cup K_4$.

2. G 的连通分支中存在 $2m(m\geq 2)$ 阶的树 T，考虑图 G'：将 G 中的 T 替换成 m 个 K_2，则 G' 也不含 $t-$独立集，且至多有 $t+3$ 条边，由引理 1 知 $G'=2K_3\cup(t-3)K_2$，故 $G=2K_3\cup P_4\cup(t-5)K_2$，由 G 不可二分，知 $t=5$，$G=2K_3\cup P_4$.