广东省2021届高三综合能力测试
数学试卷

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分．满分150分．考试时间120分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生要务必填写答题卷上的有关项目．
2．选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上．
3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卷各题目指定区域内；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效．
4．请考生保持答题卷的整洁．考试结束后，将答题卷交回．

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题意要求的．

1．设集合 $M=\{x\mid 1\le x<3\}$，$N=\{x\mid 2<x\le 4\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A．$\{x\mid 1\le x<2\}$　　B．$\{x\mid 2<x<3\}$　　C．$\{x\mid 3<x\le 4\}$　　D．$\{x\mid 1\le x\le 4\}$

2．$(i-2)(1+2i)=$（　　）

A．$-4-3i$　　B．$-5i$　　C．$5i$　　D．$4+3i$

3．已知 $a=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$b=5^{-\frac{2}{3}}$，$c=\log_2 3$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<b<a$　　D．$b<a<c$

4．如图是某市2015年至2019年文化产业的发展状况统计图，根据下图，下列说法正确的是（　　）

A．2015年至2019年，该市文化产业从业人口逐年增长
B．2015年至2019年，该市文化产业总产值增长率逐年提高
C．2015年至2019年，该市文化产业从业人口数量的变化趋势与总产值的变化趋势基本一致
D．2019年，该市文化产业从业人员人均生产总值比上一年约减少了3.5%

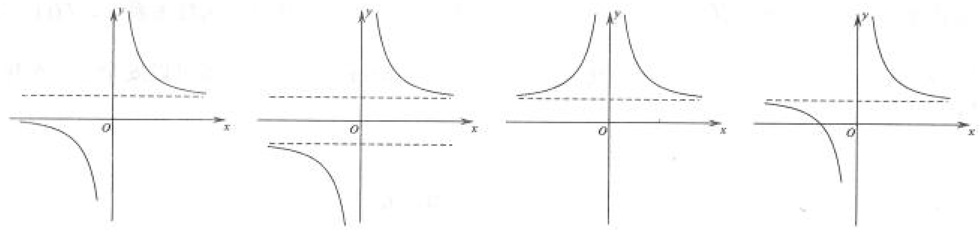
5．已知圆 $C_1: x^2+(y-2)^2=4$，抛物线 $C_2: y^2=2px(p>0)$，C_1 与 C_2 相交于 A,B 两点，且 $|AB|=2\sqrt{3}$，则抛物线 C_2 的方程为（　　）

A．$y^2=\sqrt{3}x$　　B．$y^2=2x$　　C．$y^2=3\sqrt{3}x$　　D．$y^2=8x$

6．一生产过程有4道工序，每道工序需要安排一人操作，现从甲、乙、丙等5名工人中安排4人分别操作一道工序，甲无法操作第一道工序，乙只能操作第四道工序，则不同的安排方案共有（　　）

A．24种　　B．36种　　C．48种　　D．72种

7．设 $f(x)=1+\dfrac{2}{2^x-1}$，则 $f(x)$ 的图像大致为（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

8．球 O 与棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各个面都相切，点 M 为棱 DD_1 的中点，则平面 AMC 截球 O 所得截面的面积为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{3}$　　B．$\dfrac{2\pi}{3}$　　C．π　　D．$\dfrac{4\pi}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分．

9．已知函数 $f(x)=\sin(3x-\varphi)(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称，则（　　）

A．函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度得到的图像关于原点对称

B．函数 $y=f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上单调递增

C．函数 $y=f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 3 个极大值点

D．若 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\dfrac{2\pi}{3}$

10．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 满足条件：（1）焦点为 $F_1(-5,0),F_2(5,0)$；（2）离心率为 $\dfrac{5}{3}$，求得双曲线 C 的方程为 $f(x,y)=0$．若去掉条件（2），另加一个条件求得双曲线 C 的方程仍为 $f(x,y)=0$，则下列四个条件中，符合添加的条件可以为（　　）

A．双曲线 C 上的任意点 P 都满足 $||PF_1|-|PF_2||=6$

B．双曲线 C 的虚轴长为 4

C．双曲线 C 的一个顶点与抛物线 $y^2=6x$ 的焦点重合

D．双曲线 C 的渐近线方程为 $4x\pm3y=0$

11．下表为森德拉姆（Sundaram，1934）素数筛法矩阵，其特点是每行每列的数均成等差数列，下面结论正确的是（　　）

4	7	10	13	16	19	……
7	12	17	22	27	32	……
10	17	24	31	38	45	……
13	22	31	40	49	58	……
16	27	38	49	60	71	……
19	32	45	58	71	84	……
……	……	……	……	……	……	……

A．第 3 行第 10 列的数为 73

B．第 2 行第 19 列的数与第 6 行第 7 列的数相等

C．第 13 行中前 13 列的数之和为 2626

D．200 会出现在此矩阵中

12．某地下车库在排气扇发生故障的情况下测得空气中一氧化碳含量达到了危险状态，经抢修排气扇恢复正常，排气 4 分钟后测得车库内的一氧化碳浓度为 64 ppm，继续排气 4 分钟后又测得浓度为 32 ppm．由检验知该地下车库一氧化碳浓度 y（ppm）与排气时间 t（分钟）之间存在函数关系 $y=f(t)$，其中 $\dfrac{f'(t)}{f(t)}=R$（R 为常数）．若空气中一氧化碳浓度不高于 0.5 ppm 为正常，人就可以安全进入车库了．则（　　）

A．$R=e^{-\frac{1}{4}}$　　B．$R=-\dfrac{\ln 2}{4}$

C．排气 12 分钟后，人可以安全进入车库　　D．排气 32 分钟后，人可以安全进入车库

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．曲线 $y=\ln(2x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为__________．

14．长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，AC_1 与 B_1C 所成角的正切值为 2，则该长方体的体积为__________．

15．已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$ 且 $0\le \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\le 1$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的取值范围是________，$|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最大值是________．

16．甲、乙两队进行篮球冠军争夺赛，比赛采取三局二胜制，甲队每局取胜的概率为 $\dfrac{1}{2}$．甲队有一名核心球员，如果核心球员在比赛中受伤，将不能参加后续比赛，甲队每局取胜的概率降为 $\dfrac{1}{4}$．若核心球员在每局比赛受伤的概率为 $\dfrac{1}{2}$，则甲队获得冠军的概率为__________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

在① $a=2\sqrt{3}$，② $\sin B=2\sin C$，③ $b\sin B=8$ 这三个条件中任选两个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求三角形的面积；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在△ABC，它的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $b\sin 2A=a\sin B$，__________，________？

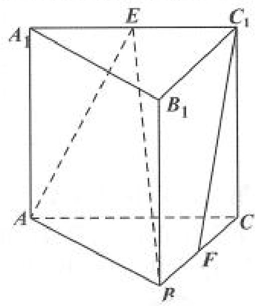
注：如果选择多种方案分别解答，那么按第一种方案解答计分．

18．（12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $ABB_1A_1,BCC_1B_1,ACC_1A_1$ 的面积依次为 $16,12,20$，E,F 分别为 A_1C_1,BC 的中点．

（1）求证：平面 $ABE\perp$ 平面 BB_1C_1C；

（2）求证：$C_1F//$ 平面 ABE．



19.（12 分）

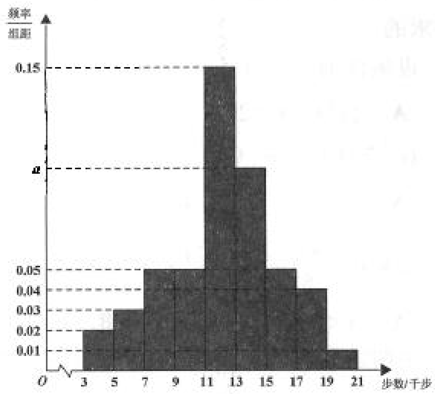
在数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 中，已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n=a_nb_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）若 $b_n=n+2$，求证：数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n+1}\right\}$ 是常数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $a_n=2^n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

20.（12 分）

随着智能手机的普及，手机计步软件迅速流行开来，这类软件能自动记载用户每日健步的步数．某市大型企业为了了解其员工每日健步走的情况，从正常上班的员工中随机抽取了 2000 人，统计了他们手机计步软件上同一天健步的步数（单位：千步，假设每天健步的步数均在 3 千步至 21 千步之间）．将样本数据分成 $[3,5),[5,7),[7,9),[9,11),[11,13),[13,15),[15,17),[17,19),[19,21]$ 九组，绘制成如图所示的频率分布直方图，并用样本的频率分布估计总体的频率分布．



（1）求图中 a 的值；

（2）设该企业正常上班的员工健步步数（单位：千步）近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本的平均数（各区间数据用中点值近似计算），取 $\sigma=3.64$，若该企业恰有 10 万人正常上班的员工，试估计这些员工中日健步步数 Z 位于区间 $[4.88,15.8]$ 范围内的人数；

（3）现从该企业员工中随机抽取 20 人，其中有 k 名员工的日健步步数在 13 千步至 15 千步内的概率为 $P(X=k)$，其中 $k=0,1,2,\cdots,20$，当 $P(X=k)$ 最大时，求 k 的值．

参考数据：若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<\xi\le\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma<\xi\le\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma<\xi\le\mu+3\sigma)\approx0.9973$．

21.（12 分）

已知椭圆 C 的中心为坐标原点，焦点在 x 轴上，焦距为 2，椭圆 C 上的点到焦点的距离的最大值为 3．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设点 A,F 分别为椭圆 C 的左顶点、右焦点，过点 F 的直线交椭圆 C 于点 P,Q，直线 AP,AQ 分别与直线 $l:x=3$ 交于点 M,N，求证：直线 FM 和直线 FN 的斜率之积为定值．

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^3$．

（1）若 $a>\dfrac{\mathrm{e}^3}{27}$，判断函数 $f(x)$ 有几个零点，并说明理由；

（2）当 $x\ge0$，$f(x)\ge\dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

广东省2021届高三综合能力测试

数 学参考答案与评分标准

一、选择题： 本大题共8小题，每小题5分，满分40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	C	B	B	A

二、选择题： 本大题共4小题，每小题5分，满分20分．全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分.

题号	9	10	11	12
答案	ABC	AD	ABC	BD

三、填空题： 本大共4小题，每小题5分，满分20分.

13. $y=2x$　　14. $4或8\sqrt{3}$（注：只填一个答案且正确给3分，有错误答案不给分）

15. $[2,2\sqrt{2}]$（2分），$4\sqrt{2}+2$（3分，填 $\sqrt{36+16\sqrt{2}}$ 也给3分）　　16. $\frac{1}{4}$

三、解答题： 本大题共6小题，满分70分．解答须写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】由 $b\sin 2A=a\sin B$，可得 $2b\sin A\cos A=a\sin B$，……1分

因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $a\sin B=b\sin A$，因此 $2\cos A=1$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，……2分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……3分

方案一： 选条件①和②

由 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 和 $\sin B=2\sin C$，可得 $b=2c$，……4分

由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 和 $a=2\sqrt{3}$，得 $12=4c^2+c^2-2c^2$，解得 $c=2$ 或 $c=-2$（舍去），……6分

则 $b=4$，这样的三角形存在. ……8分

其面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. ……10分

方案二： 选条件①和③

因为 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，……5分

又 $b\sin B=8$，解得 $b=4\sqrt{2}$，$\sin B=\sqrt{2}$，……7分

$\sin B=\sqrt{2}$ 与 $0<\sin B\le1$ 矛盾，所以这样的△ABC 不存在. ……10分

方案三： 选条件②和③

因为 $\sin C=\sin(A+B)=\sin(\frac{\pi}{3}+B)$，则 $\sin B=2\sin(\frac{\pi}{3}+B)=\sqrt{3}\cos B+\sin B$，……4分

所以 $\cos B=0$，则 $B=\frac{\pi}{2}$，$b=8$，……6分

因为$\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}=2$，则$c=4$，…………7 分

所以$a=\sqrt{b^2-c^2}=4\sqrt{3}$，这样的三角形存在．…………8 分

其面积$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 4=8\sqrt{3}$．…………10 分

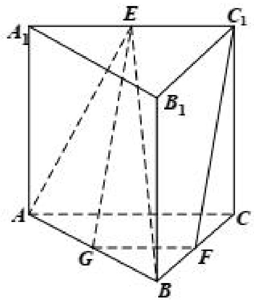
18.【解析】(1) 在直棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BB_1\perp$平面ABC，…………1 分

$AB\subset$平面ABC，$\therefore BB_1\perp AB$，…………2 分

$\because$侧面$ABB_1A_1,BCC_1B_1,ACC_1A_1$的面积依次为$16,12,20$，$\therefore AB:BC:AC=4:3:5$，

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$，即$AB\perp BC$，…………4 分

又$BB_1\cap BC=B$，$\therefore AB\perp$平面BB_1C_1C，…………5 分



又$AB\subset$平面ABE，$\therefore$平面$ABE\perp$平面BB_1C_1C．…………6 分

(2) 取AB的中点为G，连接EG,GF，…………7 分

$\because G,F$分别是AB,BC的中点，$\therefore FG//AC$且$FG=\dfrac{1}{2}AC$，……8 分

$\because E$为A_1C_1的中点，$\therefore EC_1=\dfrac{1}{2}A_1C_1=\dfrac{1}{2}AC$，又$A_1C_1//AC$，…9 分

$\therefore EC_1//GF$且$EC_1=GF$，$\therefore$四边形$EGFC_1$是平行四边形，…………10 分

$\therefore C_1F//EG$，又$C_1F\not\subset$平面ABE，$EG\subset$平面ABE，

$\therefore C_1F//$平面ABE．…………12 分

19.【解析】(1) 由题设可得$2S_n=(n+2)a_n-1$，

当$n=1$时，$2a_1=3a_1-1$，得$a_1=1$，…………1 分

当$n\geq 2$时，$2S_{n-1}=(n+1)a_{n-1}-1$，两式相减得$2a_n=(n+2)a_n-(n+1)a_{n-1}$，…………3 分

所以$na_n=(n+1)a_{n-1}$，即$\dfrac{a_n}{n+1}=\dfrac{a_{n-1}}{n}$，所以$\left\{\dfrac{a_n}{n+1}\right\}$是常数列，…………4 分

首项$\dfrac{a_1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，即$\dfrac{a}{n+1}=\dfrac{1}{2}$，…………5 分

所以$a_n=\dfrac{n+1}{2}$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n+1}{2}$．…………6 分

(2) 因为$a_n=2^n$，则$\{a_n\}$是首项$a_1=2$，公比$q=2$的等比数列，

所以$S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，…………7 分

由题设知 $2\times(2^{n+1}-2)=2^n\times b_n-1$，得 $b_n=4-\frac{3}{2^n}$， ……………………………………………9 分

所以 $T_n=(4-\frac{3}{2})+(4-\frac{3}{2^2})+\cdots+(4-\frac{3}{2^n})=4n-3(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})$

$=4n-3\times\frac{\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=4n+\frac{3}{2^n}-3$． ……………………………………………12 分

20.【解析】(1) 由 $0.02\times2+0.03\times2+0.05\times2+0.15\times2+a\times2+0.05\times2+0.04\times2+0.01\times2=1$，
解得 $a=0.1$． ……………………………………………2 分

(2) $\mu=4\times0.04+6\times0.04+8\times0.1+10\times0.1+12\times0.3+14\times0.2+16\times0.1+18\times0.08+20\times0.02=12.16$，
……………………………………………3 分

$P(4.88<Z\le15.8)=P(\mu-2\sigma<Z\le\mu+\sigma)=\frac{0.9545+0.6827}{2}=0.8186$， ……………………5 分

则 $10000\times0.8186=8186$（人），所以日健步步数 Z 位于区间 $[4.88,15.8]$ 范围内的人数约为 8186 人. …6 分

(3)设从该企业员工中随机抽取 20 人日健步步数在 13 千步至 15 千步内的员工有 X 人，则 $X\sim B(20,0.2)$，

其中有 k 名员工的概率为 $P(X=k)=C_{20}^k0.2^k\cdot0.8^{20-k}$，其中 $k=0,1,2,\cdots,20$． ……………………7 分

记 $f(k)=\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{C_{20}^k0.2^k\cdot0.8^{20-k}}{C_{20}^{k-1}0.2^{k-1}\cdot0.8^{21-k}}=\frac{21-k}{4k}$， ……………………………………9 分

当 $f(k)>1$ 时，$k<4.2$，则 $P(X=k-1)<P(X=k)$；
当 $f(k)<1$ 时，$k>4.2$，则 $P(X=k-1)>P(X=k)$． ……………………………………11 分
所以当 $k=4$ 时，$P(X=k)$ 最大. ……………………………………12 分

21.【解析】(1) 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦距为 $2c$，

依题意，可得 $\begin{cases}2c=2\\a+c=3\end{cases}$，解得 $a=2$，$c=1$， ……………………………………2 分

又 $a^2=b^2+c^2$，则 $b=\sqrt{3}$， ……………………………………3 分

所以椭圆 C 的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． ……………………………………4 分

(2) 由 (1) 得 $A(-2,0)$，$F(1,0)$，设直线 $PQ:x=my+1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$， ……………………5 分

联立 $\begin{cases}x=my+1\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消元 x，整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$， ……………………6 分

则 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$， ……………………………………7 分

依题意，可设 $M(3,y_M)$，$N(3,y_N)$，则由 $\frac{y_M}{3+2}=\frac{y_1}{x_1+2}$，可得 $y_M=\frac{5y_1}{x_1+2}=\frac{5y_1}{my_1+3}$， ……………8 分

同理，可得 $y_N=\frac{5y_2}{my_2+3}$， ……………………………………9 分

所以直线 FM 和直线 FN 的斜率之积 $k_{FM}\cdot k_{FN}=\dfrac{y_M-0}{3-1}\cdot\dfrac{y_N-0}{3-1}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{25y_1y_2}{(my_1+3)(my_2+3)}$ ………………10 分

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{25y_1y_2}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}=\frac{1}{4}\cdot\frac{25\cdot(-\dfrac{9}{3m^2+4})}{m^2\cdot(-\dfrac{9}{3m^2+4})+3m\cdot(-\dfrac{6m}{3m^2+4})+9}$$ ………………11 分

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{-25\times 9}{-9m^2-18m^2+27m^2+36}=-\frac{25\times 9}{4\times 36}=-\frac{25}{16}.$$

所以直线 FM 和直线 FN 的斜率之积为定值 $-\dfrac{25}{16}$． ………………12 分

22.【解析】(1) 令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}=1-ax^3e^{-x}$，则由于 $e^x>0$，$f(x)=0$ 当且仅当 $h(x)=0$．

因为 $a>\dfrac{e^3}{27}$，$h'(x)=ax^2(x-3)e^{-x}$， ………………1 分

所以当 $x<3$ 时，$h'(x)\le 0$ 且等号成立当且仅当 $x=0$，当 $x>3$ 时，$h'(x)>0$．

因此，$h(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增． ………………2 分

取 $x_0=256a>3$，则 $h(x_0)=1-ax_0^3e^{-x_0}=1-4^3a(\dfrac{x_0}{4}e^{-\frac{x_0}{4}})^3e^{-\frac{x_0}{4}}>1-\dfrac{4^4a}{x_0}>0$， ………………3 分

又 $h(3)=1-a\cdot\dfrac{27}{e^3}<0$，$h(0)=1>0$，根据零点存在定理，$h(x)$ 在 $(0,3)$，$(3,x_0)$ 上各有一个零点． …4 分

因此，$h(x)$ 有且只有两个零点，进而 $f(x)$ 有且只有两个零点． ………………5 分

(2) 当 $x=0$ 时，$e^x-ax^3\ge\dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+1$ 对任意实数 a 均成立， ………………6 分

故只需考虑当 $x>0$ 时，$a\le\dfrac{e^x-(\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^2+1)}{x^3}$ 恒成立，令 $g(x)=\dfrac{e^x-(\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^2+1)}{x^3}$，

则 $g'(x)=\dfrac{(x-3)e^x-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{2}x^2+2x+3}{x^4}=\dfrac{(x-3)(e^x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-1)}{x^4}$， ………………7 分

令 $\varphi(x)=1-(\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+1)e^{-x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{6}x^3e^{-x}>0(x>0)$，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增． ……8 分

因此，当 $x>0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即 $e^x-\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-x-1>0$， ………………9 分

x	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$\dfrac{e^3-22}{27}$	↗

因此，a 的取值范围为 $(-\infty,\dfrac{e^3-22}{27}]$． ………………12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 " 专业、专注、有态度 " 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。