

2023 届高三毕业班第一次质量检测

数学试题参考答案及评分细则

2023. 1

一、选择题:

1-8: B A D C C B A B

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9-12: AB AC AD BCD

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\sqrt{3}$ 14. 100

15. $\frac{1}{2^x}$ (答案不唯一) 16. 348

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解:

(1) 依题意 $a_n > 0$,

当 $n=1$ 时, $4a_1=4S_1=(a_1-1)(a_1+3)$, 解得 $a_1=3$, 1 分

由 $4S_n=(a_n-1)(a_n+3)(n \in \mathbb{N}^+)$,

当 $n \geq 2$ 时, 有 $4S_{n-1}=(a_{n-1}-1)(a_{n-1}+3)$,

作差得: $4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$, 2 分

所以 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$, 3 分

因为 $a_n+a_{n-1}>0$, 所以 $a_n-a_{n-1}=2(n \geq 2)$, 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3, 公差为 2 的等差数列, 所以 $a_n=2n+1$, 5 分

(2) $a_{50}=101$, 又 $2^6 < 101 < 2^7$, 同时 $a_{44}=89 > 2^6$, 故 $b_{50}=a_{44}$ 7 分

所以 $b_1+b_2+\dots+b_{50}=(a_1+a_2+\dots+a_{44})+(2^1+2^2+\dots+2^6)$ 8 分

$$= \frac{44}{2}(a_1 + a_{44}) + \frac{2(2^6 - 1)}{2 - 1} = 2150. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解:

$$(1) \text{ 已知 } 3bc \cos A + 4ac \cos B = ab \cos C, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{代入余弦定理, } 3(b^2 + c^2 - a^2) + 4(a^2 + c^2 - b^2) = a^2 + b^2 - c^2, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{化简得: } 4c^2 = b^2, \text{ 所以 } \frac{b}{c} = 2. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由正弦定理知 } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} \text{ 即 } \sin B = 2 \sin C, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{又 } B = 3C, \text{ 故 } \sin B = \sin 3C = \sin(2C + C) = \sin 2C \cdot \cos C + \cos 2C \cdot \sin C \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$= 2 \sin C \cdot (1 - \sin^2 C) + (1 - 2 \sin^2 C) \sin C = 3 \sin C - 4 \sin^3 C = 2 \sin C, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{即 } 3 - 4 \sin^2 C = 2, \text{ 得 } \sin C = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{故 } C = \frac{\pi}{6} (C = \frac{5}{6} \pi \text{ 舍去}),$$

$$\text{此时, } B = 3C = \frac{\pi}{2}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$b = 2c = 2AB = 2, \quad BC = \sqrt{3}, \text{ 则 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解:

$$(1) \because EF \perp \text{面 } AA_1CC_1, \text{ 又 } A_1C \subset \text{面 } AA_1CC_1, \therefore EF \perp A_1C, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{又 } F \text{ 为 } A_1C \text{ 的中点, } \therefore EA_1 = EC, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又在 Rt} \triangle A_1B_1E \text{、Rt} \triangle BEC \text{ 中, } BE = EB_1,$$

$$\text{易证得 } \triangle A_1B_1E \cong \triangle CBE, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{故 } A_1B_1 = BC.$$

$$\text{又 } AB = A_1B_1, \text{ 所以 } AB \perp BC, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$AC = \sqrt{2}, \text{ 故 } AB = 1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 以点 } B_1 \text{ 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 } B_1 - xyz, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{其中 } A_1(1, 0, 0), \quad E(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad C(0, 1, \sqrt{2}), \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

则 $\overrightarrow{A_1E} = (-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overrightarrow{A_1C} = (-1, 1, \sqrt{2})$,

不妨设 $\mathbf{m} = (x_0, y_0, z_0)$ 是平面 CA_1E 的一个法向量,

那么 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1E} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_0 = 0 \\ -x_0 + y_0 + \sqrt{2}z_0 = 0 \end{cases}$, 令 $z_0 = 2$, 则 $\mathbf{m} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$ 9 分

又 $B_1C_1 \perp$ 面 A_1B_1BA ,

故 $\overrightarrow{B_1C_1} = (0, 1, 0)$ 是平面 A_1B_1BA 的一个法向量. 10 分

设 α 为二面角 $C-A_1E-A$ 所成平面角,

则 $\cos \alpha = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\overrightarrow{B_1C_1}|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,

即二面角 $C-A_1E-A$ 的余弦值为 $\frac{1}{2}$ 12 分

20.解:

(1) 设“操作成功”为事件 S , “选择设备 M ”为事件 A , “选择设备 N ”为事件 B 1 分

由题意, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(S|A) = \frac{2}{3}$, $P(S|B) = \frac{1}{2}$ 2 分

恰在第二次操作才成功的概率 $P = P(\bar{S})P(S)$,

$P(S) = P(A)P(S|A) + P(B)P(S|B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$, 3 分

$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = \frac{5}{12}$ 4 分

所以恰在第二次操作才成功的概率为 $\frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$ 5 分

(2) 设方案甲和方案乙成功操作累计次数分别为 X, Y , 则 X, Y 可能取值均为 0, 1, 2,

$P(X=0) = P(A)P(\bar{S}|A)P(\bar{S}|B) + P(B)P(\bar{S}|B)P(\bar{S}|A)$

$= \frac{1}{2} \times (1 - \frac{2}{3}) \times (1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{6}$; 7 分

$P(X=1) = P(A)P(\bar{S}|A)P(S|B) + P(A)P(S|A)P(\bar{S}|A)$
 $+ P(B)P(\bar{S}|B)P(S|A) + P(B)P(S|B)P(\bar{S}|A)$

$= \frac{1}{2} \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times (1 - \frac{2}{3}) + \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = \frac{35}{72}$; 8 分

$P(X=2) = P(A)P(S|A)P(S|A) + P(B)P(S|B)P(S|B)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{72}; \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{35}{72} + 2 \times \frac{25}{72} = \frac{85}{72} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{方法一: } P(Y=0) = P(A)P(\bar{S}|A)P(\bar{S}|A) + P(B)P(\bar{S}|B)P(\bar{S}|B)$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 - \frac{2}{3}) \times (1 - \frac{2}{3}) + \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{2}) = \frac{13}{72};$$

$$P(Y=1) = P(A)P(\bar{S}|A)P(S|A) + P(A)P(S|A)P(\bar{S}|A)$$

$$+ P(B)P(\bar{S}|B)P(S|B) + P(B)P(S|B)P(\bar{S}|B)$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times (1 - \frac{2}{3}) + \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = \frac{17}{36}$$

$$P(Y=2) = P(A)P(S|A)P(S|A) + P(B)P(S|B)P(S|B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{72};$$

$$\text{所以 } E(Y) = 0 \times \frac{13}{72} + 1 \times \frac{17}{36} + 2 \times \frac{25}{72} = \frac{84}{72} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

方法二: 方案乙选择其中一种操作设备后, 进行 2 次独立重复试验,

$$\text{所以 } E(Y) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

决策一: 因为 $E(X) > E(Y)$, 故方案甲更好. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

决策二: 因为 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 差距非常小, 所以两种方案均可 $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21.解:

(1) 由题意设焦距为 $2c$, 则 $c=2$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

由离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $a=2\sqrt{2}$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

则 $b^2 = a^2 - c^2 = 4$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

Γ 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 不存在, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

证明如下: 假设存在圆 F_1 满足题意, 当圆 F_1 过原点 O 时, 直线 PN 与 y 轴重合,

直线 PM 的斜率为 0, 不合题意 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

依题意不妨设为 $PM: y = k_1x + 2$ ($k_1 \neq 0$),

$PN: y = k_2x + 2$ ($k_2 \neq 0$), $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 圆 F_1 的半径为 r ,

则圆心到直线 PN 的距离为 $\frac{|-2k_1+2|}{\sqrt{1+k_1^2}}=r$,

即 k_1, k_2 是关于 k 的方程 $(r^2-4)k^2+8k+r^2-4=0$ 的两异根,

此时 $k_1k_2=1$, 8 分

再联立直线 PM 与椭圆方程 $\begin{cases} y=k_1x+2 \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$, 得 $(1+2k_1^2)x^2+8k_1x=0$,

得 $M\left(\frac{-8k_1}{1+2k_1^2}, \frac{2-4k_1^2}{1+2k_1^2}\right)$, 令 $k_1=\frac{1}{k_2}$, 得 $N\left(\frac{-8k_1}{2+k_1^2}, \frac{2k_1^2-4}{2+k_1^2}\right)$, 10 分

由题意, $PM \perp MN$, 即 $k_{MN}=-\frac{1}{k_1}$, 此时

$$k_{MN} = \frac{\frac{2-4k_1^2}{1+2k_1^2} - \frac{2k_1^2-4}{2+k_1^2}}{\frac{-8k_1}{1+2k_1^2} - \frac{-8k_1}{2+k_1^2}} = \frac{(-2k_1^2+1)(k_1^2+2) - (k_1^2-2)(2k_1^2+1)}{4k_1(2k_1^2+1) - 4k_1(k_1^2+2)} = \frac{-4k_1^4+4}{4k_1(k_1^2-1)} = \frac{-(k_1^2+1)}{k_1}, \dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以 $\frac{-(k_1^2+1)}{k_1} = -\frac{1}{k_1}$, 因为 $k_1 \neq 0$, 所以方程无解, 命题得证. 12 分

22. 解:

(1) 已知 $f(x)=e^x-\frac{ax^2}{2}$, $a>0$, 则 $f'(x)=e^x-ax$, 1 分

令 $g(x)=e^x-ax$, 则 $g'(x)=e^x-a$,

当 $x=\ln a$ 时, $g'(x)=0$, 那么 $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln a]$ 上单调递减, 在 $[\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 2 分

则 $g(x) \geq g(\ln a) = a - a \ln a = a(1 - \ln a)$,

① 当 $0 < a \leq e$ 时, $g(x) \geq 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上无极值点; 3 分

② 当 $a > e$ 时, $g(\ln a) < 0$, 显然 $\frac{1}{a} < 1 < \ln a$, $g\left(\frac{1}{a}\right) = e^{\frac{1}{a}} - 1 > 0$,

则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, \ln a\right)$ 上有一个极值点, 4 分

又 $g(2\ln a) = a^2 - 2a \ln a = a(a - 2\ln a)$,

令 $h(x) = x - 2\ln x (x > e)$, $h'(x) = 1 - \frac{2}{x} > 1 - \frac{2}{e} > 0$,

故 $h(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 则 $g(2\ln a) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(\ln a, 2\ln a)$ 上有一个极值点. 5 分

综上, 当 $a \leq e$ 时, 函数 $f(x)$ 没有极值点; 当 $a > e$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个极值点.

(2) 由 (1) 中知 $f'(x) = e^x - ax$, 则 x_1, x_2 是方程 $e^x - ax = 0$ 的两根,

不妨令 $h(x) = \frac{e^x}{x}$, $h'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 知 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调增,

观察图象知, 当 $a \in (e, \frac{e^2}{2})$ 时, $0 < x_1 < 1$, $1 < x_2 < 2$, 6 分

下先证 $x_1 + x_2 > 2$ (*)

由 $\begin{cases} e^{x_1} = ax_1 \\ e^{x_2} = ax_2 \end{cases}$, 两边取对数得 $\begin{cases} x_1 = \ln a + \ln x_1 \\ x_2 = \ln a + \ln x_2 \end{cases}$, 作差, 得 $x_1 - x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2}$,

(*) 等价于证明 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = 1 > \frac{2}{x_1 + x_2} \Leftrightarrow \ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{2(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 1}$, 7 分

令 $\frac{x_1}{x_2} = t (t \in (0, 1))$, $\varphi(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, t \in (0, 1)$,

$\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t+1)^2 - 4t}{t(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \geq 0$,

故 $\varphi(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调增, 从而 $\varphi(t) < \varphi(1) = 0$, 即证得 $x_1 + x_2 > 2$, 8 分

那么 $f(x_1) + 2f(x_2) = e^{x_1} - \frac{ax_1^2}{2} + 2e^{x_2} - ax_2^2 = e^{x_1} - \frac{x_1 e^{x_1}}{2} + 2e^{x_2} - x_2 e^{x_2}$

$= (1 - \frac{x_1}{2})e^{x_1} + (2 - x_2)e^{x_2}$, 9 分

再证明 $(2 - x_2)e^{x_2} < x_1 e^{2-x_1}$,

令 $S(x) = (2 - x)e^x, x \in (1, 2)$, $S'(x) = (1 - x)e^x < 0$, 故 $S(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调减,

则 $S(x_2) < S(2 - x_1)$, 那么 $f(x_1) + 2f(x_2) < (1 - \frac{x_1}{2})e^{x_1} + x_1 e^{2-x_1}$, 10 分

再令 $M(x) = (1 - \frac{x}{2})e^x + x e^{2-x}, x \in (0, 1)$, $M'(x) = \frac{1}{2}(1 - x)e^x + (1 - x)e^{2-x} = (1 - x)(\frac{1}{2}e^x + e^{2-x}) > 0$,

则 $M(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调增, 故 $M(x_0) < M(1) = \frac{e}{2} + e = \frac{3e}{2}$, 11 分

即证得 $f(x_1) + 2f(x_2) < \frac{3e}{2}$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线