2015年清华北大自主招生部分试题

1.【解】原式通分变形等价于$xy=2015x+2015y\Rightarrow(x-2015)(y-2015)=2015^2$

$\Rightarrow(x-2015)(y-2015)=5^2\times13^2\times31^2$，所以$x-2015$必须为右边常数的因子，若$x-2015<0$，则$y-2015<0$，此时$x-2015$和$y-2015$中必有一个小于$-2015$，则$(x,y)$中有一个数小于0，不成立。所以$x-2015$和$y-2015$均为$2015^2$的正因子，且对$x-2015$取任意的正因子都有解，而$2015^2$的正因子有

$(1+2)\cdot(1+2)\cdot(1+2)=27$个，所以有27组解。

【评析】考察的内容是初等数论的不定方程问题，较常用的解法就是因式分解再枚举，这类考察方法是非常常见的，必须要掌握。

2.【解】设爬n阶台阶的方法数为a_n，考虑进行递推。

某人最后一步跨到第n级，由于他每一步最多跨两级，于是他在跨最后一步之前，停在倒数第一级或者倒数第二级，爬到倒数第一级的方法数是a_{n-1}，爬到倒数第二级的方法数是a_{n-2}，于是$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

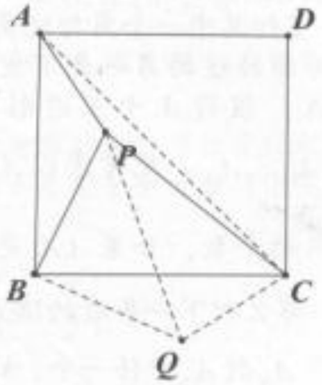
结合$a_1=1$，$a_2=2$，得出$a_{10}=89$

【评析】构造递推数列解决组合计数问题一直都是清华的考试风格，今年北大的考察足见这类题地位的重要性，必须要引起大家的重视！

3.【解】题目条件转化为：复平面上到$(0,1)$距离比到$(1,0)$距离长2，根据双曲线的定义，答案选D

【评析】此题结合了简单的复数知识和解析几何的知识，难度不大。

4.【解】已知三条线段PA、PB、PC具有一个公共顶点，且它们不能构成一个三角形。自然而然地，我们就会思考能否通过旋转使这三条线段产生一定的关联。



将 ΔABP 顺时针方向旋转 90° 得 ΔCBQ，则有 $PB \perp BQ$。由于 $PB=BQ=2a$，所以 $PQ=2\sqrt{2}a$。在 ΔPQC 中，$PC^2=9a^2=PQ^2+QC^2$，所以 $\angle PQC$ 为直角。又由于 $\angle PBQ=90^\circ$，$PB=BQ$，所以 $\angle BPQ=\angle BQP=45^\circ$。因此 $\angle APB=\angle CQB=45^\circ+90^\circ=135^\circ$。

【评析】在正方形或者正三角形中，常常出现把一个三角形以正方形一个顶点为旋转中心旋转的技巧，大家必须掌握！

5.【解】由条件，$8=|z-\bar{z}|^2=(z-\bar{z})(\bar{z}-\bar{\bar{z}})=(z-\bar{z})(\bar{z}-z)$①

由 $\frac{\bar{z}}{z^2}$ 为纯虚数可知，

$\frac{\bar{z}}{z^2}=-\frac{z}{\bar{z}^2}$，于是 $z^3=-\bar{z}^3$

因式分解得到 $(z+\bar{z})(z^2-z\bar{z}+\bar{z}^2)=0$

如果 $z+\bar{z}$ 是 0，设 $z=ai(a\in R)$，代入①式得到 $2ai\cdot(-2ai)=8$

得到 $a^2=2$，于是 $|z|=\sqrt{2}$

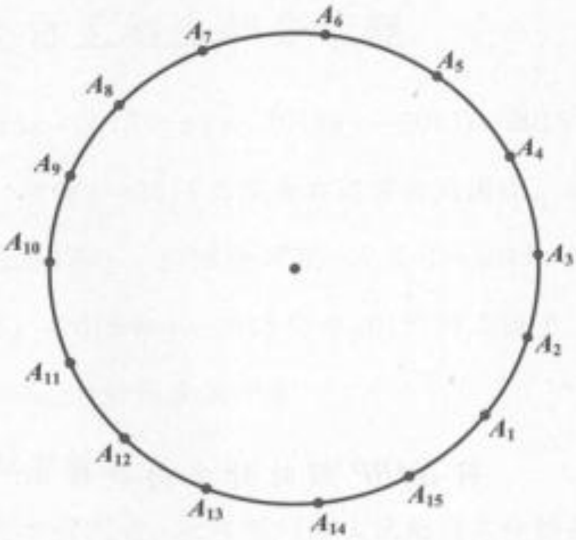
于是 $z^2-z\bar{z}+\bar{z}^2=0$，代入①式得

$8=(z-\bar{z})(\bar{z}-z)=2z\bar{z}-z^2-\bar{z}^2=z\bar{z}=|z|^2$

得到 $|z|=2\sqrt{2}$

【评析】复数的模长与共轭的相关运算历来是必考点，而且是复数这一章节最为重要的技巧和方法，其实这些技巧方法都不难，套路很明显，大家只要稍加训练即可掌握。

6.【解】考虑正十五边形中钝角的个数：可知其中一个角为钝角等价于该角对面的弦的另一侧有大于等于 7 个点，假设正十五边形的顶点为 $A_1,A_2,\dots,A_{15}$。先考虑以 A_1 为顶点的钝角的个数，如果 A_1A_2 是角的一条边，那么剩下一条边的顶点，只有可能为 A_{10} 到 A_{15} 中任一个；如果 A_1A_3 是一条边，剩下一条边的顶点只有可能为 A_{11} 到 A_{15} 中任一个……于是以 A_1 为顶点的钝角的个数为 $1+2+3+4+5+6=21$。



再注意到，每一个钝角唯一确定一个钝角三角形，每一个钝角三角形唯一确定一个钝角，于是钝角的总数量和钝角三角形的总数量是相等的。于是钝角三角形一共有 $21\times15=315$ 个。

然后需要注意的是：任何两个顶点连线都不过原点，所以顶点三角形中不存在直角三角形，于是在总共的 $C_{15}^3=455$ 个三角形中，剩下的140个都是锐角三角形

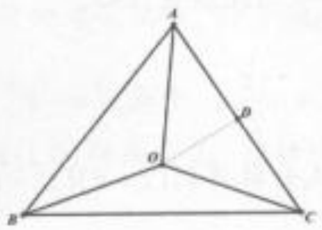
【评析】这是一道组合计数问题，并且是组合计数问题当中非常著名的正多边形的顶点角和顶点三角形的计数问题，已经属于竞赛题的范围。本题转化钝角三角形个数为钝角个数的思想是组合中基本的映射的思想。此题难度不小。

7.【解】过 O 点作 AC 的垂线，垂足 D 为 AC 中点

则 $\vec{OA}\cdot\vec{AC}=\vec{DA}\cdot\vec{AC}=-\frac{1}{2}|AC|^2=-\frac{1}{2}b^2$

剩下两个点积的值同理得到，原式的值为

$-\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$



【评析】这类向量点积的问题，作垂线投影是经常出现的方法和技巧，尤其是在出现了外心的向量问题当中，大家要引起重视。

8.【解】(1) 容易推出 $(n,n+1)=(n+1,n+2)=1$，于是 $(n+1,n(n+2))=1$

又 $a_n=n(n+1)(n+2)$ 是一个完全平方数，从而 $n+1$ 也是完全平方数

设 $n+1=k^2$，于是 $a_n=k^2\left(k^2-1\right)\left(k^2+1\right)=k^2\left(k^4-1\right)$

而 $\left(k^3-1\right)^2<k^2\left(k^4-1\right)<\left(k^3\right)^2$

于是 $a_n=n(n+1)(n+2)$ 不可能是完全平方数

(2) 直接观察得到 $n^3<n(n+1)(n+2)<(n+1)^3$，故结论同样是不能成立的

(3) 注意到 $2015=n(n+1)(n+2)>n^3$，于是 n 只有几个可能的值：1, 2, 3……11，分别检验即可知道 2015 不在数列当中（或者把 2015 分解，直接发现它不可能是连续三个数相乘即可）

【评析】通过分析互质关系，将完全平方数或者完全立方数分解，导出更强的性质，也是数论当中非常重要的技巧，此题体现出的证明不是完全平方数或者完全立方数的做法，是一类非常有代表性的方法。

9. 【解】$\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta i}=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)i}=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)i$

进而由棣莫棉公式，

$$\frac{1}{(\sin\theta+i\cos\theta)^2}+\frac{1}{(\sin\theta+i\cos\theta)^3}=\cos(2\theta-\pi)+\sin(2\theta-\pi)i+\cos\left(3\theta-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(3\theta-\frac{3}{2}\pi\right)i$$

$=-\cos 2\theta-\sin 2\theta i-\sin 3\theta+\cos 3\theta i$

$=(-\cos 2\theta-\sin 3\theta)+(\cos 3\theta-\sin 2\theta)i$

$=\dfrac{1}{2}+\left(-1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

【评析】运用复数的三角形式和棣莫棉公式，对于复数的表达式进行化简和运算也是复数当中非常重要的知识点，这道题运用此方法就比直接分母实数化再拆括号来得快

10. 【解】(I) 由条件①可取 $y=-x\in(-1,1)$，则 $f(x)+f(-x)=f(0)$

再取 $y=0\in(-1,1)$，则 $f(x)+f(0)=f(x)$

$\Rightarrow f(x)+f(-x)=0$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上图象关于原点对称

(II) 令 $-1<x_1<x_2<0$

由于 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f\left(\dfrac{x_1-x_2}{1+x_1x_2}\right)$.

又 $-1<x_1<x_2<0\Rightarrow -1<x_1-x_2<1$

且 $x_1-x_2<0\Rightarrow -1<x_1-x_2<0$　　(1)

及 $0<x_1x_2<1\Rightarrow 1<1+x_1x_2<2$　　(2)

则由（1）（2）得$-1<\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$

由条件②知$f\left(\dfrac{x_1-x_2}{1+x_1x_2}\right)>0$，从而$f(x_1)>f(x_2)$，故$f(x)$在$(-1,0)$上单调递减函数．且$f(x)>0$。由于$f(x)$为奇函数，由对称性易知$f(x)$在$(0,1)$上也为单调递减函数且$f(x)<0$。又$f(x)=0$，所以$f(x)$在$(-1,1)$上单调递减。

【评析】这道题也是我们讲义上压中的原题，它反映出的一个命题趋势是：函数表达式的不可见趋势，现在的函数题让考生来研究一个抽象的表达式，研究它的单调性、奇偶性等等性质，可能会让许多考生觉得不习惯。

11.【解】明显可以看出，数列$\{a_n\}$是以6周期的数列：

$$a_1=\frac{\sqrt{3}}{2},a_2=\frac{\sqrt{3}}{2},a_3=0,a_4=-\frac{\sqrt{3}}{2},a_5=-\frac{\sqrt{3}}{2},a_6=0，\quad S_6=0$$

故$S_{2015}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$

【评析】北大第一次考察周期数列的内容，难度并不高，但是值得大家关注

12.【解】根据和不能为99这个条件，我们构造50个抽屉：

$(1,98)(2,97)...(49,50)(99)$，每一组抽屉内的各数的和为99，于是最后一个抽屉内的99必选。接下来考察每一个选项，先看C：3724除去99，还剩3625，注意到$50+51+52+...+98=3626$，于是可取$49,51,52,...,98,99$，这50个数满足题意

再看B：相比较3626，和要减少101，于是可以考虑选取：$1,48,49,52,...97,99$

最后是A选项：和要减少201，考虑选取：$1,2,47,48,49,53,54...96,99$，答案选ABC

【评析】这道组合题具有相当大的难度，它要求考生先用抽屉原理进行分析，得出99必须选，然后根据选项的大致大小进行一个整体的估计，发现C选项刚好是在取最大的所有数时，和刚好大1，于是才有了构造方式。此题区分度非常大，从头到尾体现的都是学生的组合能力。

13.【解】由模长公式，

$$\left|\frac{\overline{z_1}-z_2}{4-z_1z_2}\right|^2=\frac{\overline{z_1}-z_2}{4-z_1z_2}\cdot\frac{\overline{\overline{z_1}}-\overline{z_2}}{4-\overline{z_1}\overline{z_2}}=\frac{\overline{z_1}-z_2}{4-z_1z_2}\cdot\frac{z_1-\overline{z_2}}{4-\overline{z_1}\overline{z_2}}$$

$$=\frac{|z_1|^2-z_1z_2-\overline{z_1}\overline{z_2}+|z_2|^2}{16-4z_1z_2-4\overline{z_1}\overline{z_2}+|z_1|^2|z_2|^2}=\frac{4-z_1z_2-\overline{z_1}\overline{z_2}+|z_2|^2}{16-4z_1z_2-4\overline{z_1}\overline{z_2}+4|z_2|^2}=\frac{1}{4}$$

答案选 B

【评析】复数的共轭运算和模长公式是复数当中的第一重点，大家必须要掌握这样的技巧和运算方式！

14. 【解】设 $x^2+y^2=a^2\left(0\le a\le 1\right)$， $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta\ \left(\theta\in[0,2\pi)\right)$

$$\left|x^2+2xy-y^2\right|=a^2\left|\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta\right|$$

$$\le\left|\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta\right|=\left|\cos 2\theta+\sin 2\theta\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\le\sqrt{2}$$

答案选 D

【评析】这是一道相当不简单的问题，对于未知数进行三角换元，再处理目标式，进行三角的变形，最后得出结果。此题能反映出考生的代数综合能力，区分度很大。

15. 【解】记 $a-b=t_1, b-c=t_2$，则原式化为 $\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}+\frac{1}{(t_1+t_2)^2}$

$$=\frac{\left(t_1t_2+t_1^2\right)^2+\left(t_1t_2+t_2^2\right)^2+\left(t_1t_2\right)^2}{\left(t_1+t_2\right)^2\left(t_1t_2\right)^2}=\frac{3\left(t_1t_2\right)^2+t_1^4+t_2^4+2t_1t_2\left(t_1^2+t_2^2\right)}{\left(t_1+t_2\right)^2\left(t_1t_2\right)^2}$$

$$=\frac{t_2^4+2t_1t_2^3+3t_1^2t_2^2+2t_1^3t_2+t_1^4}{\left(t_1+t_2\right)^2\left(t_1t_2\right)^2}=\frac{\left(t_1^2+t_2^2+t_1t_2\right)^2}{\left(t_1+t_2\right)^2\left(t_1t_2\right)^2}$$

所以 $\sqrt{N}=\frac{t_1^2+t_2^2+t_1t_2}{\left|t_1t_2\left(t_1+t_2\right)\right|}$，一定是有理数，但它不一定是整数，比如 $t_1=t_2=1$，答案选 B

【评析】此题对于代数变形能力的考察要求非常高，差值还原简化式子难度，再进行繁琐的配方。考场上其实只需要试验一组特殊情况就可以得出答案。

16. 【解】结合条件知

$$\prod\left(1+x^2\right)=\prod\left(xy+yz+xz+x^2\right)=\prod(x+y)(x+z)=(x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2$$

所以首先可以排除 BC，对于 A：

$(x+y)(y+z)(x+z)=\pm 130$，进而 $\left(1+x^2\right)(y+z)=\pm 130$ ，在 130 的因子中寻找完全平方数加 1 的形式的数，得到 $x^2=0,1,4,9,25,64$

注意到 x，y，z 均取相反数时条件 $xy+yz+xz=1$ 仍然成立，所以可以不防假设 $x>0$，于是 x 可能的取值只有：$0,1,2,3,5,8$

其中有一组解 $(8,5,-3)$ 满足题意，选 A

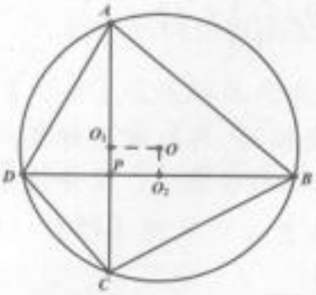
【评析】此题具有非常大的难度，对代数变形和数论分析能力的要求都很高，解

答过程当中有好几步过程都非常巧妙，很难想到，考试时也没有那么多时间和这道题死磕，猜出它必须是完全平方数之后，选A之后赶紧跳吧

17.【解】如图所示，过O作OO_1，OO_2垂直AC,BD于O_1O_2，

于是$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=2\left(AP^2+BP^2+CP^2+DP^2\right)$

$=2\left(AO_1+O_1P\right)^2+2\left(CO_1-O_1P\right)^2+2\left(DO_2-O_2P\right)^2+2\left(BO_2+O_2P\right)^2$



结合$AO_1=CO_1,BO_2=DO_2$，知上式可化简为

$4AO_1^2+4BO_2^2+4O_1P^2+4O_2P^2$

$=4\left(AO_1^2+PO_2^2\right)+4\left(BO_2^2+PO_1^2\right)$

$=4OA^2+4OB^2=8$，选B

【评析】过圆心向弦作垂线的技巧在与圆有关的平面几何的问题中非常常见，这道题技巧性很强，做法并不常规。但作为选择题可以将四边形假设为正方形轻松做出。

18.【解】容易根据指数函数的性质判断出：$a^a>a^b$，$b^a>b^b$；

根据幂函数的性质可以判断出：$b^a>a^a$，$b^b>a^b$；

现在只需要判断a^a,b^b的大小：不妨先取对数将指数部分简化，得到$a\ln a,b\ln b$

设$f(x)=x\ln x$，则$f'(x)=\ln x+1$。$f(x)$是先减后增的，于是a^a,b^b的大小是不能确定的，答案选D

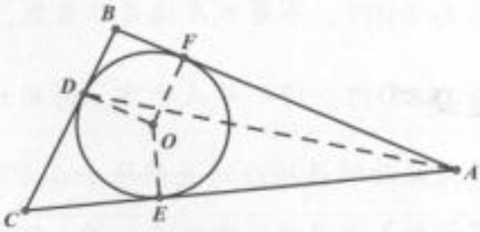
【评析】此题对于函数知识的考察，非常新颖，不是学生在平时练习过程中能够遇见的考法。它将具体数值转化为抽象的字母常量，综合考察考生对于指数函数、幂函数的知识掌握程度，最后还考察了考生函数综合分析的能力。

19.【解】我们分别观察1^n、2^n、3^n、4^n的个位数字规律。1^n：对所有的n其个位数字均为1；2^n：容易发现个位数字以4为周期，2、4、8、6、2、4、8、6进行循环；3^n，其个位数字以4为周期，3、9、7、1、3、9、7、1进行循环；4^n，个位数字以2为周期，4、6、4、6进行循环。所以易知$1^n+2^n+3^n+4^n$的个位数字以4为周期，验证前4个，其个位数字为0、0、0、4，因此对所有的被4整除的n，原式的个位数字不为0，其余的n原式的个位数字均为0，

这样的n共有$2015-\left[\dfrac{2015}{4}\right]=1512$个

【评析】题目并不难，此题直接观察个位数字的规律即可，做过此类题目的同学容易知道对于所有的正整数a，a^n的个位数字均是以4为周期的，没接触过此类题目的同学容易被题目形式吓住，找不到好的解法。

20.【解】如左图所示，欲求AD，就先去求BD,AB的长度。



容易证明四边形BDOF是正方形，于是
$BD=BF=OF=1$
而

$$AF=OF\cdot\tan\angle FOA=\tan75^\circ=\tan\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$$

于是$AD=\sqrt{BD^2+BA^2}=\sqrt{1+\left(3+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{13+6\sqrt{3}}$

【评析】没什么特别的技巧，就是分析线段长度关系，利用简单的三角计算得出结果。

21.【解】不妨设 a 是三个数里面最大的一个，ABC 三个选项给出的结果都是正整数，所以我们只考虑$(a-b)(b-c)(c-a)$大于 0 的情况。此时可以进一步推出，

三个数的大小关系是：$a>c>b$。设$m=c-b,n=a-c$（m,n均为正整数），则

$(a-b)(b-c)(c-a)=mn(m+n)$

对于 A：$mn(m+n)=126=2\times3\times3\times7$，得到$(m,n)=(2,7)(7,2)$，此时

$126=a+b+c=3b+2+9$或$3b+7+9$，均不可能，A 错误

对于 B：$mn(m+n)=144=2\times2\times2\times2\times3\times3$，这个方程是无解的（不妨设$m\geq n$，

则$144\geq n^2\cdot2n=2n^3$，容易放缩得到m,n中的较小数最大可能值为 4，再检验即可）

对于 C：$mn(m+n)=162=2\times3\times3\times3\times3$，放缩得到$m,n$中的较小数最大可能值为

4，检验即可发现$(m,n)=(3,6)$或$(6,3)$，于是$162=a+b+c=3b+12$或$3b+15$，

这两种情况下均有解，答案选 C

【评析】其实这道题实际上的解的个数是无穷的，不难验证：$c=18k^3-3k$，

$b=18k^3$，$a=18k^3+3k$，对任何的正整数 k，这样的解均是满足题意的。于是这道题的策略就应该是逐个选项分析，有一定的难度。

22.【解】由$\left\{(x,y)|\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\geq xy\right\}$

得到：$\left(1-x^2\right)\geq 0,\left(1-y^2\right)\geq 0$；

当$xy\leq 0$时，不等式左边是非负数，右边是非正数，不等式成立。

当$xy\geq 0$时，将不等式平方，得到$x^2+y^2\leq 1$。

于是最后的区域应该是两块小正方形加上两个小扇形，面积是$2+\frac{\pi}{2}$

【评析】这道题非常容易出错，因为在不等式两边进行平方操作时，必须要确定的一件事情就是不等式两边的符号是不是相同，否则平方做的便不是充分必要的变形。在此题中，非常容易犯的错误就是直接平方，然后得到面积是π

23.【解】原式变量完全对称，不妨假设$x_1\geq x_2\geq x_3$。由$x_1x_2x_3>0$知三个数均不为0，当这三个数均为正数的时候，条件显然满足。否则必有$x_3<0$，由$x_1x_2x_3>0$可以推出$x_1>0$，于是x_2是负数。我们进一步考虑这种情况是否真的可能出现：注意到$x_2+x_3<0$，$x_1>-x_2-x_3$，

于是$x_1\left(x_2+x_3\right)+x_2x_3<-\left(x_2+x_3\right)^2+x_2x_3=-x_2^2-x_3^2-x_2x_3<0$，与条件矛盾

综上，三个数都只能是正数

【评析】这道题目是一个代数综合分析的问题，分类讨论的基本想法，加上适当的观察猜出结果只有可能为三个正数，结合不等式一放缩就得到了最终的答案。