考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{x\mid y=\ln(x-2)\}$，$B=\{x\mid(x-3)(1-x)>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(3,+\infty)$　　B. $(2,3)$

C. $(1,3)$　　D. $(2,+\infty)$

2. 若复数 z 满足 $(2-i)z-i=5+4i$，则 $\bar{z}=$

A. $3-3i$　　B. $3+3i$　　C. $1-3i$　　D. $1+3i$

3. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3=15$，$a_7=35$，则 $S_9=$

A. 450　　B. 400　　C. 350　　D. 225

4. “$\log_3(x-2)<1$”成立的一个必要不充分条件为

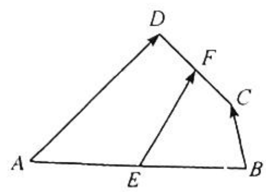
A. $2<x<5$　　B. $x>5$

C. $x<5$　　D. $3<x<5$

5. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\leqslant 2\\ x+y-1\geqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-3y$ 的最大值为

A. 5　　B. 6　　C. -7　　D. -3

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别为 AB,CD 的中点，若 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{EF}=$



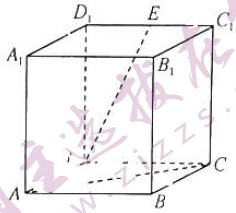
A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$

D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$

7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 为棱 C_1D_1 的中点，则异面直线 AC 与 DE 所成角的余弦值为



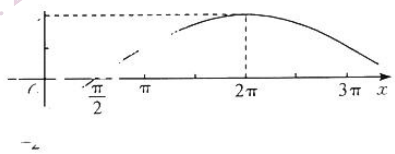
A. $\frac{1}{5}$　　　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　D. $\frac{3}{4}$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与斜率为 1 的直线交于 A,B 两点，若线段 AB 的中点为 $(4,1)$，则 C 的离心率 $e=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

9. 如图，函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象过 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$(2\pi,2)$ 两点，为得到函数 $g(x)=2\cos(\omega x-\varphi)$ 的图象，应将 $f(x)$ 的图象



A. 向右平移 $\frac{7\pi}{6}$ 个单位长度　　B. 向左平移 $\frac{7\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{5\pi}{2}$ 个单位长度　　D. 向左平移 $\frac{5\pi}{2}$ 个单位长度

10. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(2-x)=f(x)$，$f(1)=3$，则 $f(2\,022)+f(2\,023)=$

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 2

11. 已知 F 为抛物线 $C:y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点，过 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A,B 两点，若 $|FA|\cdot|FB|=32$，则 $p=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 已知定义在 $(-3,3)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+e^{4x}f(-x)=0$，$f(1)=e^2$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，当 $x\in[0,3)$ 时，$f'(x)>2f(x)$，则不等式 $e^{2x}f(2-x)<e^4$ 的解集为

A. $(-2,1)$　　B. $(1,5)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,1)$

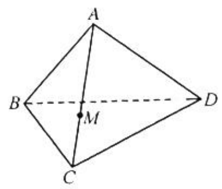
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(x-a)^7$ 的展开式中 x^3 的系数为 560，则实数 a 的一个值为____

14. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<0$，且 $a_3+a_7\geq 2a_5$，则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=$____

15. 已知 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi,f(\pi))$ 处的切线方程为____

16. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 CBD，$AB=BC=CD=AD=BD=6$，点 M 在 AC 上，$AM=2MC$，过点 M 作三棱锥 $A-BCD$ 外接球的截面，则截面圆面积的最小值为____



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.(本小题满分 12 分)

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $b\cos\frac{A}{2}=a\sin B$.

(1)求角 A；

(2)若 $b=6$，BC 边上的高为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求 c.

18.(本小题满分 12 分)

2022 年 7 月 6 日～14 日，素有"数学界奥运会"之称的第 29 届国际数学家大会，受疫情影响，在线上进行，世界各地的数学家们相聚云端、共襄盛举.某学校数学爱好者协会随机调查了学校 100 名学生，得到如下调查结果：男生占调查人数的 55%，喜欢数学的有 40 人，其余的人不喜欢数学；在调查的女生中，喜欢数学的有 20 人，其余的不喜欢数学.

(1)请完成下面 2×2 列联表，并根据 2×2 列联表判断是否有 99.5%的把握认为该校学生喜欢数学与学生的性别有关?

	喜欢数学	不喜欢数学	合计
男生	40		
女生			
合计	60	40	100

(2)采用分层抽样的方法，从不喜欢数学的学生中抽取 8 人，再从这 8 人中随机抽取 3 人，记 X 为 3 人中不喜欢数学的男生人数，求 X 的分布列和数学期望.

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

临界值表：

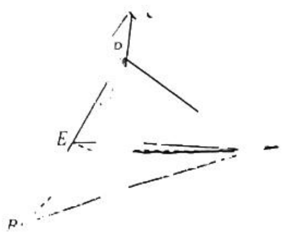
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19.(本小题满分 12 分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 $PAC\perp$底面 ABC，E 为 PB 的中点.

(1)若 $AB=AP$，$CB=CP$，求证：$BP\perp AC$；

(2)若 $AB=\sqrt{3}AP$，$\angle BAC=150°$，$\angle PAC=60°$，求直线 AP 与平面 ACE 所成角的正弦值.



20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,且 F_1,F_2 与短轴的两个端点恰好为正方形的四个顶点,点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在 E 上.

(1)求 E 的方程;

(2)过点 F_2 作互相垂直且与 x 轴均不重合的两条直线分别交 E 于点 A,B 和 C,D,若 M,N 分别是弦 AB,CD 的中点,证明:直线 MN 过定点.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)当 $a=-1$ 时,判断曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=-4\ln(2-x)$ 交点的个数,并说明理由.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数).以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=m$.

(1)求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2)若 C_1 与 C_2 交于相异两点 A,B,且 $|AB|=2\sqrt{3}$,求 m 的值.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知 $a>0,b>0,c>0$,证明:

(1)[illegible] $+8ab\geqslant 8$;

(2)$\frac{a^2b^2+\text{[illegible]}}{a+b+c}\geqslant abc$.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1.B　由题意知 $A=(2,-\infty)$，$B=(1,3)$，所以 $A\cap B=(2,3)$，故选 B.

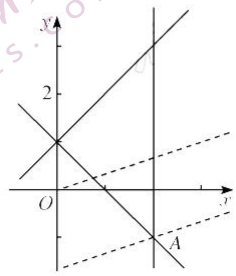
2.C　由 $(2-i)z-i=5+4i$，得 $z=\frac{5+5i}{2-i}=\frac{(5+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5+15i}{5}=1+3i$，所以 $\bar{z}=1-3i$. 故选 C.

3.D　解法一：由 $\begin{cases}a_1+2d=15,\\a_1+6d=35,\end{cases}$ 解得 $a_1=d=5$，所以 $S_9=9a_1+\frac{9\times8}{2}\times d=225$. 故选 D.

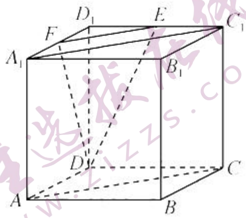
解法二：$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_3+a_7)}{2}=\frac{9\times50}{2}=225$. 故选 D.

4.C　由 $\log_3(x-2)<1$，得 $2<x<5$，所以选项 A 是充要条件，选项 B 是既不充分又不必要条件，选项 D 是充分不必要条件，选项 C 是必要不充分条件. 故选 C.

5.A　画出可行域(如图阴影部分)，当直线 $z=x-3y$ 经过点 A 时 z 的取值最大，易得 $A(2,-1)$，所以 $z_{max}=5$. 故选 A.

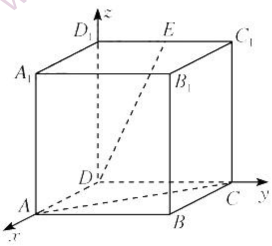


6.A　由题意知 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$，因为 E，F 分别为 AB，CD 的中点，所以 $\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{CF}$，所以 $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. 故选 A.



7.B　法一：取 A_1D_1 的中点 F，连接 A_1C_1，EF，DF，则 $A_1C_1\,/\!/\,AC$，$EF\,/\!/\,A_1C_1$，所以 $EF\,/\!/\,AC$，所以 $\angle DEF$ 或其补角为 AC 与 DE 所成的角，设正方体的棱长为 2，则 $DE=DF=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{2}$，所以 $\cos\angle DEF=\frac{5+2-5}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，故 AC 与 DE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$. 故选 B.

法二：以直线 DA，DC，DD_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，设 $AD=2$，则 $A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$E(0,1,2)$，所以 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,1,2)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{2}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 故 AC 与 DE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$. 故选 B.



8.C　法一：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$，所以 $\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{a^2}-\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{b^2}=0$，因为 AB 的中点为 $(4,1)$，所以 $x_1+x_2=8$，$y_1+y_2=2$，所以 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4b^2}{a^2}$，由题意知 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$，所以 $\frac{4b^2}{a^2}=1$，即 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，则 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 C.

法二：直线 AB 过点 $(4,1)$，斜率为 1，所以其方程为 $y-1=x-4$，即 $y=x-3$. 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 并整理得 $(b^2-a^2)x^2+6a^2x-9a^2-a^2b^2=0$. 因为 $(4,1)$ 为线段 AB 的中点，所以 $-\frac{6a^2}{b^2-a^2}=2\times4$，整理得 $a^2=4b^2$，所以 C 的离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 C.

9. D　设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图象知 $\frac{T}{4}=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$，所以 $T=6\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{6\pi}=\frac{1}{3}$，又 $f(2\pi)=2$，所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$. 而 $g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{6}\right]$，所以将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{2}$ 个单位长度可得函数 $g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象. 故选 D.

10. A　由题意，得 $f(2+x)=f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，所以 $f(2\ 022)+f(2\ 023)=f(2)+f(-1)$，因为 $f(-x+1)=f(x+1)$，令 $x=1$，得 $f(2)=f(0)$，因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，$f(-1)=-f(1)=-3$，所以 $f(2\ 022)+f(2\ 023)=0-3=-3$. 故选 A.

11. D　由题意知 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，$AB$ 的方程为 $y=x-\frac{p}{2}$，代入 C 的方程，得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=3p$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；因为 $|FA|=\frac{p}{2}+x_1$，$|FB|=\frac{p}{2}+x_2$，且 $|FA|\cdot|FB|=32$，所以 $\left(\frac{p}{2}+x_1\right)\left(\frac{p}{2}+x_2\right)=32$，整理得 $\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+x_1x_2=32$，所以 $\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}\cdot3p+\frac{p^2}{4}=32$，结合 $p>0$，解得 $p=4$. 故选 D.

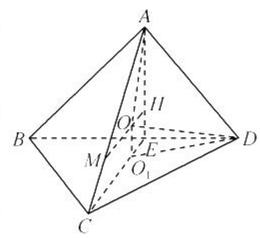
12. B　令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$，所以 $f(x)=e^{2x}g(x)$，因为 $f(x)+e^{4x}f(-x)=0$，所以 $e^{2x}\cdot g(x)+e^{4x}\cdot e^{-2x}g(-x)=0$，化简得 $g(x)+g(-x)=0$，所以 $g(x)$ 是 $(-3,3)$ 上的奇函数；$g'(x)=\frac{f'(x)e^{2x}-2e^{2x}f(x)}{e^{4x}}=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$，因为当 $0\leqslant x<3$ 时，$f'(x)>2f(x)$，所以当 $x\in[0,3)$ 时，$g'(x)>0$，从而 $g(x)$ 在 $[0,3)$ 上单调递增，又 $g(x)$ 是 $(-3,3)$ 上的奇函数，所以 $g(x)$ 在 $(-3,3)$ 上单调递增；考虑到 $g(1)=\frac{f(1)}{e^2}=\frac{e^2}{e^2}=1$，由 $e^{2x}f(2-x)<e^4$，得 $e^{2x}e^{2(2-x)}g(2-x)<e^4$，即 $g(2-x)<1=g(1)$. 由 $g(x)$ 在 $(-3,3)$ 上单调递增，得 $\begin{cases}-3<2-x<3,\\2-x<1,\end{cases}$ 解得 $1<x<5$，所以不等式 $e^{2x}f(2-x)<e^4$ 的解集为 $(1,5)$. 故选 B.

13. 2（-2 也可以）　$T_{r+1}=C_7^rx^{7-r}(-a)^r$，令 $7-r=3$，得 $r=4$，故 $T_5=C_7^4a^4x^3$，由题意知 $C_7^4a^4=560$，即 $35a^4=560$，解得 $a=\pm2$.

14. 1　由 $a_3+a_7\geqslant2a_5$，得 $a_1q^2+a_1q^6\geqslant2a_1q^4$，由 $a_n<0$，得 $a_1<0$，所以 $1+q^4\leqslant2q^2$，即 $(q^2-1)^2\leqslant0$，又 $(q^2-1)^2\geqslant0$，所以 $q^2-1=0$，即 $q=\pm1$. 考虑到 $a_n<0$，则 $q=1$.

15. $2x-y-2\pi-2=0$　因为 $f(x)=2\cos x-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x$，所以 $f'(x)=-2\sin x+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x$，所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$，所以 $f(x)=2\cos x-2\sin x$，$f'(x)=-2\sin x-2\cos x$，所以 $f'(\pi)=-2\cos\pi-2\sin\pi=2$，$f(\pi)=-2$，故所求切线方程为 $y-(-2)=2(x-\pi)$，即 $2x-y-2\pi-2=0$.

16. 12π　由题意知 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 均为等边三角形，取 BD 的中点 E，连接 AE，CE，则 $AE\perp BD$，再由平面 $ABD\perp$ 平面 CBD，平面 $ABD\cap$ 平面 $CBD=BD$，可得 $AE\perp$ 平面 CBD，$AE=AD\sin60^\circ=3\sqrt{3}$，同理 $CE\perp$ 平面 ABD，$CE=3\sqrt{3}$；设球心 O 在平面 BCD 的投影为 $\triangle BCD$ 的外心 O_1，球心 O 在平面 ABD 的投影为 $\triangle ABD$ 的外心 H，且 H 在 AE 上，易得 $OH\parallel O_1E$，$OO_1\parallel HE$，且四边形 $OHEO_1$ 为正方形. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OHA$ 中，$OH=\sqrt{3}$，$AH=2\sqrt{3}$，则外接球半径为 $R=\sqrt{OH^2+AH^2}=\sqrt{15}$. 连接 OM，因为 $AH=2HE$，$AM=2MC$，所以 $MH\parallel CE$；又 $OH\parallel CE$，所以 H，O，M 三点共线，所以 $OM=MH-OH=\frac{2}{3}\times\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}=\sqrt{3}$，当 M 为截面圆圆心时截面面积最小，此时截面圆半径 $r=\sqrt{(\sqrt{15})^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，面积为 12π.



17. 解：(1)由 $b\cos\frac{A}{2}=a\sin B$ 及正弦定理，得 $\sin B\cos\frac{A}{2}=\sin A\sin B$， ………… 2分

因为 $\sin B\neq0$，所以 $\cos\frac{A}{2}=\sin A$， ………… 3分

所以 $\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$. ………… 4分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\frac{A}{2}\neq0$，

所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$， ………… 5分

所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 6分

(2)法一：因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times a\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times c\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}c$， ………… 8分

所以 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a=\frac{3\sqrt{3}}{2}c$，即 $a=2c$， ………… 9分

由余弦定理得 $a^2=36+c^2-6c$，将 $a=2c$ 代入可得 $c^2+2c-12=0$， ………… 11分

解得 $c=\sqrt{13}-1$ 或 $c=-\sqrt{13}-1$（舍去），

故 $c=\sqrt{13}-1$. ………… 12分

法二：因为 BC 边上的高 $\frac{3\sqrt{3}}{2}=b\sin C$，因为 $b=6$，所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以 $\cos C=\pm\sqrt{1-\sin^2C}=\pm\frac{\sqrt{13}}{4}$， ………… 8分

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\pm\frac{\sqrt{13}}{4}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{39}}{8}$.

因为 $\sin B>0$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{39}}{8}$， ………… 10分

由正弦定理，得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{8}{\sqrt{3}+\sqrt{39}}=\sqrt{13}-1$， ………… 11分

故 $c=\sqrt{13}-1$. ………… 12分

18. 解：(1)调查的男生人数为 $100\times55\%=55$（人），调查的女生人数为 $100-55=45$（人），

补全 2×2 列联表如下：

	喜欢数学	不喜欢数学	合计
男生	40	15	55
女生	20	25	45
合计	60	40	100

………… 3分

$K^2=\frac{100\times(40\times25-15\times20)^2}{60\times40\times55\times45}\approx8.249>7.879$， ………… 5分

所以有99.5%的把握认为该校学生喜欢数学与学生的性别有关. ………… 6分

(2)在抽取的8人中，不喜欢数学的男生人数 $15\times\frac{8}{40}=3$ 人，不喜欢数学的女生人数 $25\times\frac{8}{40}=5$ 人，

由题意可知，X 的可能取值为0，1，2，3，

$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$. ………………………………………… 9分

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

故 $E(X)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{9}{8}$. ………………………………………… 12分

19.（1）证明：因为 E 为 PB 的中点，$AB=AP$，$CB=CP$，

所以 $PB\perp AE$，$PB\perp CE$. ………………………………………… 2分

又 $AE\cap CE=E$，且 AE，$CE\subset$平面 ACE，所以 $PB\perp$平面 ACE. ………………………………………… 3分

因为 $AC\subset$平面 ACE，所以 $BP\perp AC$. ………………………………………… 4分

（2）解：作 $PO\perp AC$，垂足为点 O.

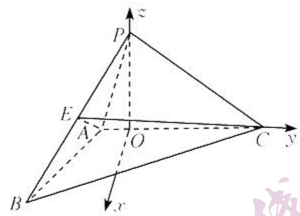
因为平面 $PAC\perp$底面 ABC，平面 $PAC\cap$底面 $ABC=AC$，$PO\subset$平面 PAC，

所以 $PO\perp$平面 ABC. ………………………………………… 6分

以 O 为坐标原点，直线 OC，OP 分别为 y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

设 $AP=1$，因为 $\angle PAC=60°$，所以 $P\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$A\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-2,0\right)$，

………………………………………… 7分



所以 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-1,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$\overrightarrow{OA}=\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$.

………………………………………… 8分

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是平面 ACE 的法向量，则

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0,\\ -\frac{1}{2}y=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}z=-x,\\ y=0.\end{cases}$

取 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$. ………………………………………… 10分

设直线 AP 与平面 ACE 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AP}\rangle|=\frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\times\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

所以直线 AP 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. ………………………………………… 12分

20.（1）解：设 $|F_1F_2|=2c$，因为两个焦点和短轴的两个端点为正方形的四个顶点，所以 $b=c$，

因为点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在 E 上，所以 $\frac{2}{4a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$，又 $a^2=b^2+c^2$， ………………………………………… 2分

所以 $a^2=2$，$b^2=1$，

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………… 4分

（2）证明：由（1）知 $F_2(1,0)$，由题意知，直线 AB 和直线 CD 的斜率都存在且不为 0，设直线 AB 方程为 $x=my+1$，与 E

的方程联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ x=my+1,\end{cases}$

消去 x 并整理,得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$. ………………………………………………………… 5 分

首先 $\Delta=4m^2+4(m^2+2)>0$;

其次,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}$,所以 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\dfrac{4}{m^2+2}$,

所以点 M 的坐标为$\left(\dfrac{2}{m^2+2},-\dfrac{m}{m^2+2}\right)$,

由 $AB\perp CD$,可得直线 CD 的方程为 $x=-\dfrac{1}{m}y+1$,

同理得 $N\left(\dfrac{2m^2}{2m^2+1},\dfrac{m}{2m^2+1}\right)$, ………………………………………………………… 6 分

当$\dfrac{2m^2}{2m^2+1}\neq\dfrac{2}{m^2+2}$,即 $m\neq\pm1$ 时,直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\dfrac{\dfrac{m}{2m^2+1}+\dfrac{m}{m^2+2}}{\dfrac{2m^2}{2m^2+1}-\dfrac{2}{m^2+2}}=\dfrac{3m}{2(m^2-1)}$,

所以直线 MN 的方程为 $y+\dfrac{m}{m^2+2}=\dfrac{3m}{2(m^2-1)}\left(x-\dfrac{2}{m^2+2}\right)$, ……………………………… 8 分

所以 $y=\dfrac{3m}{2(m^2-1)}\left(x-\dfrac{2}{m^2+2}\right)-\dfrac{m}{m^2+2}=\dfrac{3m}{2(m^2-1)}\left[x-\dfrac{2}{m^2+2}-\dfrac{2(m^2-1)}{3(m^2+2)}\right]$,

因为$\dfrac{2}{m^2+2}+\dfrac{2(m^2-1)}{3(m^2+2)}=\dfrac{6+2(m^2-1)}{3(m^2+2)}=\dfrac{2(m^2+2)}{3(m^2+2)}=\dfrac{2}{3}$,

所以直线 MN 的方程为 $y=\dfrac{3m}{2(m^2-1)}\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$,显然 MN 过定点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$; ……………………… 10 分

当$\dfrac{2m^2}{2m^2+1}=\dfrac{2}{m^2+2}$,即 $m^2=1$,则 $M\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$,$N\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$或 $M\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$,$N\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$,

从而直线 MN 的方程为 $x=\dfrac{2}{3}$,也过点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. ………………………………………………… 11 分

综上所述,直线 MN 过定点$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1) $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=e^x-a$, ………………………………………………………… 1 分

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为增函数; ………………………………………… 2 分

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)<0$,得 $x<\ln a$,$f'(x)>0$,得 $x>\ln a$,

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减,在$(\ln a,+\infty)$上单调递增. ……………………………………… 4 分

(2)因为 $a=-1$,所以 $f(x)=e^x+x$,设 $g(x)=e^x-x+4\ln(2-x)$,则其定义域为$(-\infty,2)$,

$g'(x)=e^x-\dfrac{2+x}{2-x}=e^x\left[1-\dfrac{2+x}{(2-x)e^x}\right]$,且 $g'(0)=0$, ………………………………………… 5 分

设 $m(x)=1-\dfrac{2+x}{(2-x)e^x}(x<2)$,则 $m'(x)=-\dfrac{x^2}{(2-x)^2e^x}\leqslant0$,

所以 $m(x)$在$(-\infty,2)$上单调递减, ………………………………………………………………………… 6 分

所以当 $x<0$ 时,$m(x)>m(0)=0$;当 $0<x<2$ 时,$m(x)<m(0)=0$, ……………………………… 7 分

即当 $x<0$ 时,$g'(x)=e^xm(x)>0$;当 $0<x<2$ 时,$g'(x)=e^xm(x)<0$, ………………………… 8 分

所以 $g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,在$(0,2)$上单调递减,

故 $g(x)_{\max}=g(0)=1+4\ln2$, ………………………………………………………………………… 9 分

取 $x_0\in(2-e^{\frac{e^2+2}{4}},2)$，则 $4\ln(2-x_0)<4\ln[2-(2-e^{\frac{e^2+2}{4}})]=4\ln e^{\frac{e^2+2}{4}}=-e^2-2$，

所以 $g(x_0)=e^{x_0}+x_0+4\ln(2-x_0)<e^2+2-e^2-2=0$，即 $g(x_0)<0$；…………10分

$g(-14)=e^{-14}-14+4\ln 16$，考虑到 $16<e^3$，则 $\ln 16<3$，即 $4\ln 16<12$，又 $e^{-14}<1$，所以 $g(-14)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-14,0)$ 和 $(0,x_0)$ 上各有一个零点，即 $g(x)$ 有两个零点，…………11分

故曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=-4\ln(2-x)$ 有两个交点．…………12分

22．解：(1)在 C_1 的参数方程中消去参数 α，得 C_1 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=4$；…………2分

由 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=m$ 得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta=m$，…………4分

又 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，所以 C_2 的直角坐标方程为 $x-y-\sqrt{2}m=0$．…………5分

(2)由(1)知曲线 C_1 是以 $(1,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，曲线 C_2 为直线，…………6分

则圆心 $(1,0)$ 到曲线 C_2 的距离 $d=\frac{|1-\sqrt{2}m|}{\sqrt{2}}$，…………7分

因为 $|AB|=2\sqrt{3}$，所以 $\left(\frac{|1-\sqrt{2}m|}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2=2^2$，…………8分

解得 $m=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，或 $m=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$．…………10分

23．证明：(1)法一：因为 $a>0,b>0$，

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+8ab=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4ab+4ab\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot 4ab\cdot 4ab}=8$．…………3分

当且仅当 $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}=4ab$，即 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立．…………4分

法二：因为 $a>0,b>0$，

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant\frac{2}{ab}$，当且仅当 $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}$，即 $a=b$ 时等号成立．…………2分

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+8ab\geqslant\frac{2}{ab}+8ab\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{ab}\times 8ab}=8$，当且仅当 $\frac{2}{ab}=8ab$，即 $ab=\frac{1}{2}$ 时，等号成立．…………3分

综上，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+8ab\geqslant 8$，当且仅当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立．…………4分

(2)因为 $a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2ab^2c$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立；

$b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2abc^2$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立；

$c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2a^2bc$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，…………7分

所以 $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geqslant 2abc(a+b+c)$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立．…………8分

因为 $a>0,b>0,c>0$，所以 $a+b+c>0$，…………9分

所以 $\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}\geqslant abc$．…………10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。