理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	B	B	B	B	C	D	B	A	B	C

11. 提示：$a_n=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}$，则数列$\{a_n\}$递增. 令$f(x)=x\ln x$，则$f'(x)=1+\ln x$，所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上递减，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上递增，而$a_4=\frac{3}{8}\approx\frac{1}{2.6667}>\frac{1}{e}$，$a_3<\frac{1}{e}$，且$b_3-b_4=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\ln\frac{3}{8}=\frac{1}{8}\ln\frac{32}{27}>0$，$b_4$最小，故选 B.

12. 提示：由于$(\ln x)^2+mx^2\ln x=\ln x(\ln x+mx^2)=x^2\ln x\left(\frac{\ln x}{x^2}+m\right)>0$且$\mathrm{card}(A\cap N)=3$，于是问题等价于有且仅有三个正整数满足不等式$\frac{\ln x}{x^2}+m>0$. 令$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}+m$，则$f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，所以$f(x)$在$(0,\sqrt{e})$上递增，在$(\sqrt{e},+\infty)$上递减，而$1<\sqrt{e}<2$，所以要使满足不等式$\frac{\ln x}{x^2}+m>0$的正整数$x$有且仅有三个，则$f(4)=\frac{\ln 4}{4^2}+m>0$且$f(5)=\frac{\ln 5}{5^2}+m\leqslant 0$，即$-\frac{\ln 4}{16}<m\leqslant\frac{\ln 5}{25}$. 故选 C.

二、填空题

13. 169　14. $(-54,-21)$　15. ①④

16. 2　（提示：解法一：设$P(t,t-2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为$y'=\frac{x}{p}$，所以过A点的切线方程为$y-y_1=\frac{x_1}{p}(x-x_1)$，即$x_1^2-2x_1x+2py=0$，又此切线过$P(t,t-2)$点，所以$x_1^2-2tx_1+2p(t-2)=0$同理$x_2^2-2tx_2+2p(t-2)=0$，所以$\frac{x_1+x_2}{2}=t$，$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{4p}=\frac{t^2-p(t-2)}{p}$，所以$M\left(t,\frac{t^2-p(t-2)}{p}\right)$，则$N\left(t,\frac{t^2}{2p}\right)$，所以$\lambda=\dfrac{\frac{t^2}{p}-2(t-2)}{\frac{t^2}{2p}-(t-2)}=2$.

解法二：取$P(0,-2)$，则$A(2\sqrt{p},2)$，$B(-2\sqrt{p},2)$，所以$M(0,2)$，$N(0,0)$，所以$\lambda=2$.）

三、解答题

17. (1) $f(x)=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\left(2\sin x,\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right)\cdot(\cos x,1)$

$=\sin 2x+\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}+\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. ………………………………（4 分）

由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$得，$k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，

函数$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递增区间为$\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$和$\left[\frac{7\pi}{12},\pi\right]$. ………………………（6 分）

(2)因为 a^2,b^2,c^2 成等差数列，所以 $b^2=\frac{1}{2}(a^2+c^2)$.

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-\frac{1}{2}(a^2+c^2)}{2ac}=\frac{a^2+c^2}{4ac}\geqslant\frac{2ac}{4ac}=\frac{1}{2}$， ························ (8 分)

又 $0<B<\pi$ 且函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递减，所以 $B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$，即 $\frac{\pi}{3}<2B+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$，

故 $f(B)$ 的取值范围为 $[0,2]$. ·· (12 分)

18. (1)由分层抽样原理可知，男生应抽取 18 人，女生应抽取 12 人，所以 $x=8,y=4$. ············ (3 分)

(2)其列联表如下所示

	男生	女生	总计
课余不参加体育锻炼	5	4	9
课余参加体育锻炼	13	8	21
总计	18	12	30

则 $K^2=\frac{30(5\times 8-4\times 13)^2}{9\times 21\times 18\times 12}=0.106<2.706$，

故没有 90% 的把握认为"课余不参加体育锻炼"与性别有关. ································ (6 分)

(3)抽取的 3 名女生的情况如下表所示

A 类	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
B 类	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
C 类	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
X	3	2	1	1	0	1	0	1	2	3

·· (8 分)

则 $P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{12}^3}+\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{5}{220}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2C_5^1}{C_{12}^3}+\frac{C_5^1C_3^2}{C_{12}^3}=\frac{45}{220}$，

$P(X=1)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_{12}^3}+\frac{C_4^1C_5^2}{C_{12}^3}+\frac{C_4^1C_3^2}{C_{12}^3}+\frac{C_5^2C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{100}{220}$，$P(X=0)=\frac{C_4^1C_5^1C_3^1}{C_{12}^3}+\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{70}{220}$， ········ (11 分)

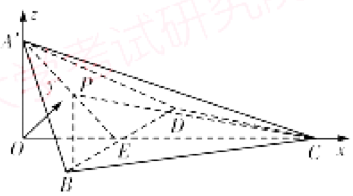
故 X 的均值为 $E(X)=3\times\frac{5}{220}+2\times\frac{45}{220}+1\times\frac{100}{220}+0\times\frac{70}{220}=\frac{41}{44}$. ························ (12 分)

19. (1)因为 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CA'}+(1-\lambda)\overrightarrow{CE}$，所以 $\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EA'}$，即 P 点在直线 EA' 上，

所以 $CP\subset$ 平面 CEA'.

又在 $\triangle A'BD$ 中，$A'E\perp BD$. 在 $\triangle CBD$ 中，$CE\perp BD$.

所以 $BD\perp$ 平面 CEA'，所以 $BD\perp CP$. ···················· (4 分)



(2)由 $\lambda=\frac{1}{2}$ 可知 P 点为线段 EA' 的中点.

由(1)可知 $\angle A'EC$ 为二面角 $A'-BD-C$ 的平面角，

所以 $\angle A'EC=120°$.

过 A' 作垂直直线 EC 的直线，垂足为 O，以 O 为原点，OC 为 x 轴，OA' 为 z 轴，建立空间直角坐标系如图所示，设 $BC=2$.

则 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1,0\right)$，$C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1,0\right)$，$A'\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$，$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，

所以 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{4},0,\frac{3}{4}\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},1,\frac{3}{4}\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$，$\overrightarrow{A'C}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},0,-\frac{3}{2}\right)$. …… (7 分)

设平面 $A'CD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=(x,y,z)\cdot(\sqrt{3},-1,0)=\sqrt{3}x-y=0$，即 $y=\sqrt{3}x$.

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'C}=(x,y,z)\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},0,-\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}z=0$，即 $z=\sqrt{3}x$.

取 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$，所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BP}\rangle|=\left|\frac{(1,\sqrt{3},\sqrt{3})\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},1,\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}}\right|=\frac{3\sqrt{3}}{7}$.

直线 BP 与平面 $A'CD$ 所成的角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{3}}{7}$ …………………………………… (12 分)

20. (1) 设 $P(x,y)$，当 P 点不与 A,B 两点重合时，则有 $\frac{y-\frac{3}{2}}{x-1}=\frac{-\frac{3}{2}}{m-1}$，即 $m=\frac{2y-3x}{2y-3}$. 同理 $n=\frac{2y+3x}{2y+3}$.

所以 $mn=\frac{2y-3x}{2y-3}\cdot\frac{2y+3x}{2y+3}=\frac{4y^2-9x^2}{4y^2-9}=4$，即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

而 A,B 两点的坐标满足方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………… (4 分)

(2) 设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

将 $y=kx+1$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$，

则 $\Delta=(8k)^2+32(3+4k^2)>0$，且 $x_1+x_2=-\frac{8k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{-8}{3+4k^2}$. …………………………… (6 分)

所以 $|EM|\cdot|EN|=\frac{1}{4}|MN|^2=\frac{1}{4}(1+k^2)\times\frac{96(1+2k^2)}{(3+4k^2)^2}=\frac{24(1+k^2)(1+2k^2)}{(3+4k^2)^2}$. …… (8 分)

且 E 的坐标为 $\left(\frac{-4k}{3+4k^2},\frac{3}{3+4k^2}\right)$，则直线 OE 的方程为 $y=-\frac{3}{4k}x$，

代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得 $Q\left(\frac{4k}{\sqrt{3+4k^2}},\frac{-3}{\sqrt{3+4k^2}}\right)$，$R\left(\frac{-4k}{\sqrt{3+4k^2}},\frac{3}{\sqrt{3+4k^2}}\right)$.

所以 $|EQ|\cdot|ER|=\sqrt{1+\frac{9}{16k^2}}\left|\frac{4k}{\sqrt{3+4k^2}}-\frac{-4k}{3+4k^2}\right|\cdot\sqrt{1+\frac{9}{16k^2}}\left|\frac{-4k}{\sqrt{3+4k^2}}-\frac{-4k}{3+4k^2}\right|=$

$\frac{16k^2+9}{16k^2}\times\frac{16k^2(3+4k^2-1)}{(3+4k^2)^2}=\frac{2(16k^2+9)(1+2k^2)}{(3+4k^2)^2}$. …………………………………… (10 分)

所以 $\lambda=\frac{|EM|\cdot|EN|}{|EQ|\cdot|ER|}=\frac{12(1+k^2)}{16k^2+9}=\frac{3}{4}+\frac{21}{4(16k^2+9)}\in\left(\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right]$.

故实数 λ 的取值范围为 $\left(\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right]$. …………………………………………………… (12 分)

21. (1) 因为 $f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$，所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 的图像在点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 处的切线方程为 $y-1=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，

即 $y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi^2}{4}+1$. ………………………………………………………………… (2 分)

(2) 令 $h_1(x)=ax^3-f(x)=ax^3-\sin x+x\cos x$,

则 $h_1'(x)=3ax^2-\cos x+\cos x-x\sin x=3ax^2-x\sin x=x(3ax-\sin x)$

令 $h_2(x)=3ax-\sin x$, 则 $h_2'(x)=3a-\cos x$ ………………………………………… (4 分)

因为 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 且 $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x\leqslant 1$, 所以 $h_2'(x)=3a-\cos x\geqslant 0$, 所以 $h_2(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, $h_2(x)\geqslant h_2(0)=0$, 即 $h_1'(x)\geqslant h_1'(0)=0$.

所以 $h_1(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 即 $h_1(x)\geqslant h_1(0)=0$.

故当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 不等式 $f(x)\leqslant ax^3$ 恒成立. ……………………………… (6 分)

(3) 由于 $(-2\cos x-x\sin x)'=2\sin x-\sin x-x\cos x=\sin x-x\cos x=f(x)$,

所以 $m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=[-2\cos x-x\sin x]\big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}+2$, ……………………………… (8 分)

所以 $g(x)=\frac{6m}{(4-\pi)x^3}f(x)=\frac{3(-\pi+4)}{(4-\pi)x^3}f(x)=\frac{3}{x^3}f(x)$.

因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x>x$, 即 $\sin x-x\cos x>0$,

所以当 $0<x<1$ 时 $0<f(x)<\frac{1}{3}x^3$, $0<g(x)=\frac{3}{x^3}f(x)<x$, 即 $0<g\left(\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{3^n}$.

令 $m(x)=e^x-1-x$, 则 $m'(x)=e^x-1$, 所以当 $x>0$ 时 $m'(x)=e^x-1>e^0-1=0$,

所以 $m(x)=e^x-1-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $m(x)=e^x-1-x>m(0)=0$,

即 $1+x<e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立, 所以 $0<1+g\left(\frac{1}{3^n}\right)<1+\frac{1}{3^n}<e^{\frac{1}{3^n}}$. ……………… (10 分)

所以 $\left[1+g\left(\frac{1}{3}\right)\right]\left[1+g\left(\frac{1}{3^2}\right)\right]\left[1+g\left(\frac{1}{3^3}\right)\right]\cdots\left[1+g\left(\frac{1}{3^n}\right)\right]<e^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{1}{3^2}}\cdot e^{\frac{1}{3^3}}\cdot\cdots\cdot e^{\frac{1}{3^n}}=e^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

又 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{2}$,

故 $\left[1+g\left(\frac{1}{3}\right)\right]\left[1+g\left(\frac{1}{3^2}\right)\right]\left[1+g\left(\frac{1}{3^3}\right)\right]\cdots\left[1+g\left(\frac{1}{3^n}\right)\right]<e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$. ……………… (12 分)

22. (1) 曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=16$,

直线 l 的直角坐标方程为 $x+y=4m$. ……………………………………………………………… (5 分)

(2) 由题意曲线 C 的圆心 $(1,-1)$ 到直线 l 的距离为 $2\sqrt{3}$, 所以 $2\sqrt{2}|m|=2\sqrt{3}$, 即 $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. …… …………………………………………………………………………………………………… (10 分)

23. (1) $\because f(x)=|x+2|+|x-3|\geqslant|(x+2)-(x-3)|=5$,

又 $f(0)=|0+2|+|0-3|=5$, $\therefore f(x)\geqslant f(0)$. ………………………………………………… (5 分)

(2) 要使 $\forall x\in R$ 不等式 $3f(x)>f(a+1)$ 恒成立, 则 $[3f(x)]_{\min}>|a+3|+|a-2|$,

即 $15>|a+3|+|a-2|$, 解得 $-8<a<7$. ………………………………………………………… (10 分)