高中2019级教学质量检测

数学试题

本试卷共6页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知复数 $z=1+\mathrm{i}$（i为虚数单位），$\overline{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $\dfrac{\overline{z}}{z}=$

A．$1-\mathrm{i}$　　B．$1+\mathrm{i}$　　C．$-\mathrm{i}$　　D．i

2．已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 的所有非空真子集的元素之和等于9，则 $a_1+a_2+a_3=$

A．1　　B．2　　C．3　　D．6

3．已知双曲正弦函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，则

A．$f(x)$ 为偶函数

B．$f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减

C．$f(x)$ 没有零点

D．$f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增

4．《算法统宗》是中国古代数学名著，在这部著作中，许多数学问题都是以歌诀形式呈现的，“九儿问甲歌”就是其中一首：一个公公九个儿，若问生年总不知，自长排来差三岁，共年二百又零七，借问长儿多少岁，各儿岁数要详推．在这个问题中，这位公公最年幼的儿子的岁数为

A．8　　B．11　　C．14　　D．16

5．已知一个样本，样本容量为10，平均数为15，方差为3，现从样本中去掉一个数据15，此时样本的平均数为$\overline{x}$，方差为s^2，则

A．$\overline{x}>15$，$s^2<3$　　B．$\overline{x}<15$，$s^2>3$

C．$\overline{x}=15$，$s^2>3$　　D．$\overline{x}=15$，$s^2<3$

6．已知$a=x^2+\dfrac{1}{4x^2}$，$b=\pi^{-0.1}$，$c=\log_3[(2-t)t]$，则a,b,c的大小关系为

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$

C．$c>b>a$　　D．$a>c>b$

7．为调查新冠疫苗接种情况，需从5名志愿者中选取3人到3个社区进行走访调查，每个社区1人，若甲乙两人至少有一人入选，则不同的选派方法有

A．12种　　B．18种　　C．36种　　D．54种

8．将函数$y=\sqrt{13-x^2}-2(x\in[-3,3])$的图象绕点$(-3,0)$逆时针旋转$\alpha(0\le\alpha\le\theta)$，得到曲线$C$，对于每一个旋转角$\alpha$，曲线$C$都是一个函数的图象，则$\theta$最大时的正切值为

A．$\dfrac{3}{2}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9．已知平面向量$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-2,1),\vec{c}=(2,t)$，下列说法正确的是

A．若$(\vec{a}+\vec{b})\,//\,\vec{c}$，则$t=6$　　B．若$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{c}$，则$t=\dfrac{2}{3}$

C．若$t=1$，则$\cos<\vec{a},\vec{c}>=\dfrac{4}{5}$　　D．$|\vec{a}+\vec{c}|<3$

10．在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，E,F,G,H分别为线段AA_1,A_1C_1,C_1B_1,BB_1的中点，下列说法正确的是

A．E,F,G,H四点共面　　B．平面$EGH\,//$平面ABC_1

C．直线A_1A与FH异面　　D．直线BC与平面AFH平行

11．已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 过双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的焦点，C_1 的焦点恰为 C_2 的顶点，C_1 与 C_2 的交点按逆时针方向分别为 A,B,C,D，O 为坐标原点，则

A．C_2 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

B．C_1 的右焦点到 C_2 的一条渐近线的距离为 $\sqrt{3}$

C．点 A 到 C_2 的两顶点的距离之和等于 4

D．四边形 $ABCD$ 的面积为 $\dfrac{8\sqrt{6}}{7}$

12．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$，若 $f(0)+f(\dfrac{\pi}{2})=0$，且 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上有且仅有三个极值点，则

A．$f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{3}$

B．$f(x)$ 在区间 $[\dfrac{k\pi}{3}-\dfrac{\pi}{18},\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{9}](k\in Z)$ 上单调递增

C．$f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上的最小值等于 $-\dfrac{1}{2}$

D．将 $g(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位可得到 $y=f(\dfrac{x}{3})$ 的图象

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知 $\tan\alpha=3$，$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha=$__________；

14．函数 $y=\sqrt{2x^2-1}$ 的图象在点 $(1,1)$ 处的切线方程为__________；

15．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC,AC=BC=1,PA=\sqrt{2}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积为__________；

16．设函数 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的偶函数，且 $f(x)=f(2-x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^3$，则函数 $g(x)=|\cos\pi x|-f(x)$ 在 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}]$ 上所有零点之和为__________.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17．（10分）

在① $2b\sin A = a\tan B$，② $a^2-b^2=ac-c^2$，③ $\sqrt{3}\sin B=\cos B+1$ 这三个条件中任选一个，补充在下面横线上，并解答．

在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 ________．

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $b=2$，ΔABC 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 ΔABC 的周长．

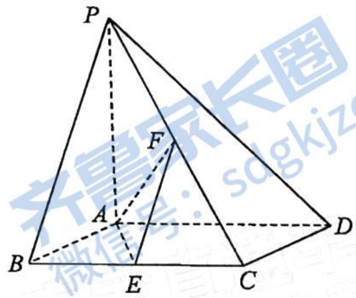
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18．（12分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AB=2$，$\angle ABC=60^\circ$，E 为 BC 的中点，F 为 PC 的中点．

（1）求证：平面 $AEF\perp$ 平面 PAD；

（2）求平面 AEF 与平面 PCD 的夹角的余弦值．



19．（12分）

已知等差数列 $\{A_n\}$ 的首项 A_1 为4，公差为6，在 $\{A_n\}$ 中每相邻两项之间都插入两个数，使它们和原数列的项一起构成一个新的等差数列 $\{a_n\}$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n},\cdots$ 是从 $\{a_n\}$ 中抽取的部分项按原来的顺序排列组成的一个等比数列，$k_1=1$，$k_2=5$，令 $b_n=2nk_n+2n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

20．（12分）

北京时间2021年8月8日，历时17天的东京奥运会落下帷幕，中国代表团以38金、32银、18铜、打破4项世界纪录、创造21项奥运会纪录的傲人成绩，顺利收官．作为“梦之队”的中国乒乓球队在东京奥运会斩获4金3银的好成绩，参赛的7名选手全部登上领奖台．我国是乒乓球生产大国，某厂家生产了两批同种规格的乒乓球，第一批占60%，次品率为6%；第二批占40%，次品率为5%．为确保质量，现在将两批乒乓球混合，工作人员从中抽样检查．

（1）从混合的乒乓球中任取1个．

（ⅰ）求这个乒乓球是合格品的概率；

（ⅱ）已知取到的是合格品，求它取自第一批乒乓球的概率．

（2）从混合的乒乓球中有放回地连续抽取2次，每次抽取1个，记两次抽取中，抽取的乒乓球是第二批的次数为X，求随机变量X的分布列和数学期望．

21．（12分）

已知O为坐标原点，抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的准线与圆$O:x^2+y^2=5$交于M,N两点，抛物线C与圆O交于M',N'两点，且$|MN|=|M'N'|$．

（1）求抛物线C的标准方程；

（2）动点G在抛物线C的准线上，直线AB与抛物线C交于A,B两点，直线$A'B'$与抛物线C交于A',B'两点，AB与$A'B'$的交点为G，且$|GA|\cdot|GB|=2|GA'|\cdot|GB'|$．设直线$AB$，$A'B'$的斜率分别为$k_1,k_2$，证明：$\dfrac{1}{k_1^2}-\dfrac{2}{k_2^2}$为定值．

22. （12分）

已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-a(x+1)$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $a\le 0$，求证：$f(x)\ge 0$；

(2) 若 $f(x)$ 有且只有两个零点 x_1,x_2.

（i）求 a 的取值范围；

（ii）求证：$\dfrac{1}{\ln x_1-a}+\dfrac{1}{\ln x_2-a}>0$.

青岛市高中2019级教学质量检测
数学参考答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。

1—8：C C D B　C A D B

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

9．BC　　10．ABC　　11．ACD　　12．ABD

三、填空题：本题共4个小题，每小题5分，共20分。

13．$\frac{\sqrt{10}}{5}$；　　14．$y=2x-1$；　　15．$\frac{4}{3}\pi$；　　16．7．

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17．（本小题满分10分）

解：（1）选择条件①：

因为 $2b\sin A=a\tan B$，

所以由正弦定理可得 $2\sin B\sin A=\sin A\tan B$

所以 $2\sin B\sin A=\frac{\sin A\sin B}{\cos B}$

因为 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\sin B>0$，

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$

选择条件②：

因为 $a^2-b^2=ac-c^2$，整理得 $a^2+c^2-b^2=ac$

所以由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$

选择条件③：

因为 $\sqrt{3}\sin B=\cos B+1$，所以 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=2\sin(B-\frac{\pi}{6})=1$

即 $\sin(B-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

因为 $B\in(0,\pi)$，$B-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$

所以 $B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{3}$

(2) 因为 $B=\frac{\pi}{3}$，所以$\triangle ABC$的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以 $ac=2$

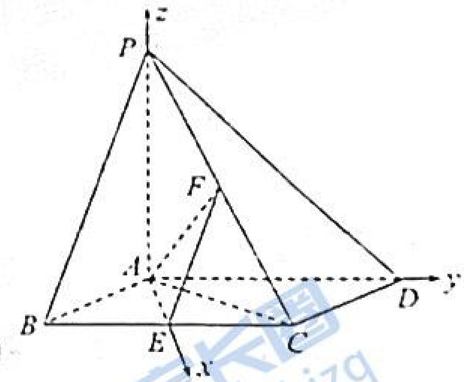
因为 $b=2$，所以由余弦定理得：

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac=(a+c)^2-6=4$

所以 $a+c=\sqrt{10}$

所以$\triangle ABC$的周长为 $2+\sqrt{10}$

18.（本小题满分12分）



解：(1) 证明：连接AC，

$\because$四边形$ABCD$为菱形，$\angle ABC=60^\circ$

$\therefore \triangle ABC$为正三角形，$AD\parallel BC$

$\because E$为BC的中点，$\therefore AE\perp BC$

$\therefore AE\perp AD$

$\because PA\perp$平面$ABCD$，

$AE\subset$平面$ABCD$，

$\therefore AE\perp PA$

$\because PA\cap AD=A$，

$\therefore AE\perp$平面PAD

$\because AE\subset$平面AEF

$\therefore$平面$AEF\perp$平面PAD

(2) 以A为原点，AE所在的直线为x轴，建系如图所示，则$A(0,0,0)$，$E(\sqrt{3},0,0)$，$P(0,0,2)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(0,2,0)$，$F(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$，

设面AEF的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AF}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x_1=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+z_1=0\end{cases}$

令$y_1=2$，则$z_1=-1$，$x_1=0$，取$\overrightarrow{n_1}=(0,2,-1)$

设面PCD的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},1,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x_2+y_2-2z_2=0\\ 2y_2-2z_2=0\end{cases}$

令$y_2=\sqrt{3}$，则$z_2=\sqrt{3}$，$x_2=1$，取$\overrightarrow{n_2}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$

设平面AEF与平面PCD的夹角为θ，则

$\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|=\left|\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}\right|=\dfrac{\sqrt{105}}{35}$

19.（本小题满分 12 分）

解：(1) 设数列$\{a_n\}$的公差为d

由题意可知，$a_1=A_1=4$，$a_4=A_2=4+6=10$

所以$a_4=4+(4-1)\times d=10$

解得$d=2$

所以$a_n=a_1+(n-1)d=4+(n-1)\times2=2n+2$

(2) 设等比数列$a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n},\cdots$的公比为$q$

则$q=\dfrac{a_{k_2}}{a_{k_1}}=\dfrac{a_5}{a_1}=\dfrac{12}{4}=3$，所以$a_{k_n}=4\cdot3^{n-1}$

又$a_{k_n}=2k_n+2$，

所以$2k_n+2=4\cdot3^{n-1}$，$k_n=2\cdot3^{n-1}-1$

$\therefore b_n=2nk_n+2n=4n\cdot3^{n-1}$

$T_n=4\times3^0+8\times3^1+12\times3^2+\cdots+4n\cdot3^{n-1}$

$3T_n=\quad 4\times3^1+8\times3^2+12\times3^3+\cdots+4(n-1)\cdot3^{n-1}+4n\cdot3^n$

相减得：$-2T_n=4\times3^0+4\times3^1+4\times3^2+\cdots+4\cdot3^{n-1}-4n\cdot3^n$

$=\dfrac{4(1-3^n)}{1-3}-4n\cdot3^n=-2(2n-1)\cdot3^n-2$

$\therefore T_n=(2n-1)\cdot3^n+1$

20.（本小题满分 12 分）

解：(1) 设A_i表示"取自第i批乒乓球"$(i=1,2)$；C表示"取到的是合格品"．

(i) $P(C)=P(A_1C\cup A_2C)=P(A_1C)+P(A_2C)=P(A_1)P(C|A_1)+P(A_2)P(C|A_2)$

$=0.6\times(1-0.06)+0.4\times(1-0.05)=0.944$

(ii) $P(A_1|C)=\dfrac{P(A_1C)}{P(C)}=\dfrac{P(A_1)P(C|A_1)}{P(C)}=\dfrac{0.564}{0.944}=\dfrac{141}{236}$

(2) 由题知，随机变量 X 的所有可能的取值为 0,1,2

$P(X=0)=0.6^2=0.36$

$P(X=1)=C_2^1\times0.4\times0.6=0.48$

$P(X=2)=0.4^2=0.16$

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.36	0.48	0.16

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times0.36+1\times0.48+2\times0.16=0.8$

21.（本小题满分 12 分）

解: (1) 由对称性可知，$M'N'\perp x$ 轴，所以 $MN\,//\,M'N'$，设 $|MN|=|M'N'|=a$

则 O 到 MN 的距离与 O 到 $M'N'$ 的距离相等，均为 $\sqrt{5-\dfrac{a^2}{4}}$

所以直线 $M'N'$ 过抛物线 C 的焦点

设 $M'(\dfrac{p}{2},y_0)$，由 $\begin{cases}y_0^2=2p\cdot\dfrac{p}{2}\\(\dfrac{p}{2})^2+y_0^2=5\end{cases}$，解得 $p=2$

所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$

(2) 设 $G(-1,t)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

直线 AB 的方程为：$y=k_1x+m_1$，则 $t=-k_1+m_1$

将 $y=k_1x+m_1$ 代入 $y^2=4x$ 可得：$k_1^2x^2+(2k_1m_1-4)x+m_1^2=0$

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4-2k_1m_1}{k_1^2},x_1x_2=\dfrac{m_1^2}{k_1^2}$

因为 $|GA|\cdot|GB|=\sqrt{1+k_1^2}(x_1+1)\sqrt{1+k_1^2}(x_2+1)=(1+k_1^2)(x_1x_2+x_1+x_2+1)$

所以 $|GA|\cdot|GB|=(1+k_1^2)(\dfrac{m_1^2}{k_1^2}+\dfrac{4-2k_1m_1}{k_1^2}+1)=(1+\dfrac{1}{k_1^2})(t^2+4)$

设直线 $A'B'$ 的方程为：$y=k_2x+m_2$，则 $t=-k_2+m_2$

同理可得 $|GA'|\cdot|GB'|=(1+\dfrac{1}{k_2^2})(t^2+4)$

因为 $|GA|\cdot|GB|=2|GA'|\cdot|GB'|$，所以 $(1+\dfrac{1}{k_1^2})(t^2+4)=2(1+\dfrac{1}{k_2^2})(t^2+4)$

即 $1+\dfrac{1}{k_1^2}=2+\dfrac{2}{k_2^2}$，所以 $\dfrac{1}{k_1^2}-\dfrac{2}{k_2^2}=1$ 为定值

22．（本小题满分12分）

解：(1) 当$a=0$时，$f(x)=(x-1)\ln x$

若$x\in(0,1)$，则$x-1<0$，$\ln x<0$，$f(x)>0$；

若$x=1$，$f(1)=0$；

若$x\in(1,+\infty)$，则$x-1>0$，$\ln x>0$，$f(x)>0$；

所以当$a=0$时，$f(x)\geq 0$

当$a<0$时，$f(x)>(x-1)\ln x\geq 0$

所以当$a\leq 0$时，$f(x)\geq 0$

(2)（i）由（1）知$a\leq 0$不合题意

当$a>0$时，$f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}-a$，令$h(x)=f'(x)$，所以$h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$h(1)<0$，$h(e^a)>0$

所以，存在$x_0\in(1,e^a)$使得$h(x_0)=f'(x_0)=0$

所以，当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增；

因为$f(x_0)<f(1)<0$，

$$f(e^{3a+1})>3a(e^{3a+1}-1)-a(e^{3a+1}+1)=2a(e^{3a+1}-2)>0$$

$$f(e^{-3a-1})>(3a+1)(1-e^{-1})-a(e^{-1}+1)>2a(1-2e^{-1})>0$$

所以，$f(x)$在(e^{-3a-1},x_0)和(x_0,e^{3a+1})各恰有一个零点

所以a的取值范围是$a>0$

（ii）因为$f(\frac{1}{x})=\frac{f(x)}{x}$，所以，若$f(x)=0$，则$f(\frac{1}{x})=0$

所以$x_1=\frac{1}{x_2}$，即$x_1x_2=1$

又因为$(x_1-1)\ln x_1-a(x_1+1)=0,(x_2-1)\ln x_2-a(x_2+1)=0$

所以$x_1=1+\frac{2a}{\ln x_1-a},x_2=1+\frac{2a}{\ln x_2-a}$

所以$1+\frac{2a}{\ln x_1-a}+1+\frac{2a}{\ln x_2-a}=x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2$

所以$\frac{1}{\ln x_1-a}+\frac{1}{\ln x_2-a}>0$

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索