

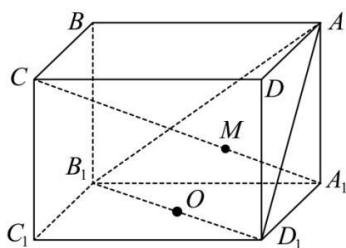
高三数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 复数 $\frac{1+i}{1-i}$ (i 为虚数单位) 的共轭复数的虚部等于 ()
A. 1 B. -1 C. i D. $-i$
- 已知 M, N 为全集 R 的两个不相等的非空子集, 若 $(\complement N) \subseteq ({}_R M)$, 则下列结论正确的是 ()
A. $\forall x \in N, x \in M$ B. $\exists x \in M, x \notin N$
C. $\exists x \notin N, x \in M$ D. $\forall x \in M, x \notin \complement N$
- 过圆 $O: x^2 + y^2 = 5$ 外一点 $P(2, \sqrt{5})$ 作圆 O 的切线, 切点分别为 A, B , 则 $|AB| =$ ()
A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ D. 3
- 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, $(a_4 + \lambda a_7) \cdot a_8 = (a_6 - a_9)^2$ 且公比 $q \in (1, 2)$, 则实数 λ 的取值范围为 ()
A. (1, 9) B. (2, 10) C. (1, 8) D. (-1, 6)
- 某学校有 6 个数学兴趣小组, 每个小组都配备 1 位指导老师, 现根据工作需要, 学校准备将其中 4 位指导老师由原来的小组均相应的调整到其他兴趣小组, 其余的 2 位指导老师仍在原来的兴趣小组 (不作调整), 如果调整后每个兴趣小组仍配备 1 位指导老师, 则不同的调整方案为 ()
A. 135 种 B. 360 种 C. 90 种 D. 270 种
- 正方形 $ABCD$ 的四个顶点都在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 若椭圆的焦点在正方形的内部, 则椭圆的离心率的取值范围是
A. $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1\right)$
- 已知函数 $y = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$ 图象与函数 $y = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) (\omega > 0)$ 图象相邻的三个交点依次为 A, B, C , 且 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 则 ω 的取值范围是 ()
A. $\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ D. $\left(0, \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)$
- 设 $a = \frac{1}{8}e^{\frac{2}{5}}, b = \frac{1}{5}e^{\frac{1}{4}}, c = \frac{3}{20}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
A. $a < c < b$ B. $a < b < c$
C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

- 如图, $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是长方体, O 是 B_1D_1 的中点, 直线 A_1C 交平面 AB_1D_1 于点 M , 则下列结论正确的是 ()



- A. B, B_1, O, M 四点共面 B. A, M, O, A_1 四点共面
C. A, O, C, M 四点共面 D. A, M, O 三点共线

10. 定义：设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数， $f''(x)$ 是函数 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x) = 0$ 有实数解 x_0 ，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $y = f(x)$ 的“拐点”. 经过探究发现：任何一个三次函数都有“拐点”且“拐点”就是三次函数图像的对称中心. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{5}{3}$ ($ab \neq 0$) 的对称中心为 $(1, 1)$ ，则下列说法中正确的有 ()

- A. $a = \frac{1}{3}, b = -1$
B. 函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值
C. 函数 $f(x)$ 有三个零点
D. 过 $(-1, \frac{1}{3})$ 可以作三条直线与 $y = f(x)$ 图像相切

11. 设点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\overrightarrow{CO} = \lambda \overrightarrow{CA} + \mu \overrightarrow{CB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$)，下列命题为真命题的是 ()

- A. 若 $\lambda + \mu = 1$ ，则 $C = \frac{\pi}{2}$
B. 若 $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$ ，则 $\lambda^2 + \mu^2 = 1$
C. 若 $\triangle ABC$ 是正三角形，则 $\lambda + \mu = \frac{2}{3}$
D. 若 $\lambda + \mu > 1$ ， $\overrightarrow{AB} = (-2, 1)$ ， $\overrightarrow{CO} = (2, 4)$ ，则四边形 $AOBC$ 的面积是 5

12. 中国结是一种手工编织工艺品，因为其外观对称精致，可以代表汉族悠久的历史，符合中国传统装饰的习俗和审美观念，故命名为中国结. 中国结的意义在于它所显示的情致与智慧正是汉族古老文明中的一个侧面，也是数学奥秘的游戏呈现. 它有着复杂曼妙的曲线，却可以还原成最单纯的二维线条. 其中的八字结对应着数学曲线中的双纽线.

曲线 $C: (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$ 是双纽线，则下列结论正确的是 ()

- A. 曲线 C 的图象关于 $y = x$ 对称
B. 曲线 C 上任意一点到坐标原点 O 的距离都不超过 3
C. 曲线 C 经过 7 个整点 (横、纵坐标均为整数的点)
D. 若直线 $y = kx$ 与曲线 C 只有一个交点，则实数 k 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

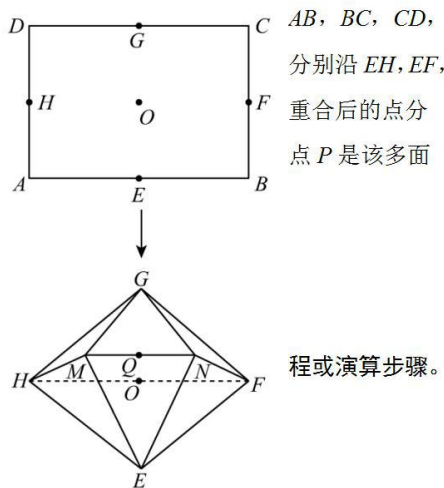
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. “ $\tan \alpha = 3$ ”是“ $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ ”的 _____ 条件 (请从“充分不必要”，“必要不充分”，“充要”，“既不充分也不必要”中选择一个)

14. 设 $(2x-3)^{2023} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{2023}(x-1)^{2023}$, 则 $a_{2023} =$ _____.

15. 设函数 $f(x) = e^x + e^{-x} - \frac{1}{\lg(x^2+1)}$, 则使得 $f(2x+1) < f(x-2)$ 成立的 x 的取值范围是 _____.

16. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}AD = 4$, E, F, G, H 分别为 AB, BC, CD, AD 的中点, AC 与 BD 交于点 O , 现将 $\triangle AEH, \triangle BEF, \triangle CFG, \triangle DGH$ 分别沿 EH, EF, FG, GH 把这个矩形折成一个空间图形, 使 A 与 D 重合, B 与 C 重合, 别记为 M, N, Q 为 MN 的中点, 则多面体 $MNEFGH$ 的体积为 _____; 若体表面上的动点, 满足 $PQ \perp ON$ 时, 点 P 的轨迹长度为 _____.



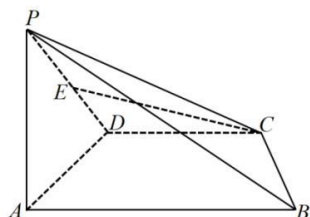
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过

17. (本小题满分 10 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \perp$ 平面 PAB , $AP \perp AB$, $CD \perp PD$

(1) 证明: $CD \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 E 是 PD 的中点, $AB = AP = 4$, $AD = DC = 2$. 求直线 CE 与平面 BCE 所成角的正弦值.



18. (本小题满分 12 分)

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_2 = 7$, 对任意的自然数 n , 恒有 $a_n = \frac{2S_n - 3n}{n}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若集合 $A = \{x | x = a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $B = \{x | x = 3^n, n \in \mathbb{N}^*\}$, 将集合 $A \cup B$ 中的所有元素按从小到大的顺序排列构成数列 $\{b_n\}$, 计数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 求 T_{102} 的值.

19. (本小题满分 12 分)

在凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, $AD = 3$, $AB = 4$.

(1) 若 $\angle ABC = 45^\circ$, 求 CD ;

(2) 若 $\angle BCD$ 的角平分线交对角线 BD 于点 E , 求 $BC + CE + CD$ 的最大值.

20. (本小题满分 12 分)

某学校为了了解高一学生安全知识水平, 对高一年级学生进行“消防安全知识测试”, 并且规定“体能达标”预测

成绩小于 60 分的为“不合格”，否则为“合格”。若该校“不合格”的人数不超过总人数的 5%，则该年级知识达标为“合格”；否则该年级知识达标为“不合格”，需要重新对该年级学生进行消防安全培训。现从全体高一学生中随机抽取 10 名，并将这 10 名学生随机分为甲、乙两个组，其中甲组有 6 名学生，乙组有 4 名学生。甲组的平均成绩为 70，标准差为 4；乙组的平均成绩为 80，标准差为 6（题中所有数据的最后结果都精确到整数）。

(1) 求这 10 名学生测试成绩的平均分 \bar{x} 和标准差 s ；

(2) 假设高一学生的知识测试成绩服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。将上述 10 名学生的成绩作为样品，用样本平均数 \bar{x} 作为 μ 的估计值，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值。利用估计值估计：高一学生知识达标是否“合格”？

(3) 已知知识测试中的多项选择题中，有 4 个选项。小明知道每道多项选择题均有两个或三个正确选项。但根据得分规则：全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。这样，小明在做多项选择题时，可能选择一个选项，也可能选择两个或三个选项，但不会选择四个选项。假设小明在做该道多项选择题时，基于已有的解题经验，他选择一个选项的概率为 $\frac{1}{2}$ ，选择两个选项的概率为 $\frac{1}{3}$ ，选择三个选项的概率为 $\frac{1}{6}$ 。已知该道多项选择题只有两个正确选项，小明完全不知道四个选项的正误，只好根据自己的经验随机选择。记 X 表示小明做完该道多项选择题后所得的分数。求 X 的分布列及数学期望。

附：① n 个数的方差 $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ；

② 若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$ ， $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$ ， $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9974$ 。

21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < a < 3, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$ 。斜率为 $\frac{b}{a}$ 的直线 m 经过点

$M(3, 0)$ ，点 N 是直线 m 与双曲线 E 的交点，且 $|MN| = \sqrt{2}$ 。

(1) 求双曲线 E 的方程；

(2) 若经过定点 $P(1, 1)$ 的直线 l 与双曲线 E 相交于 A, B 两点，经过点 A 斜率为 -2 的直线与直线 m 的交点为 T ，求证：直线 BT 经过 x 轴上的定点。

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ 和函数 $g(x) = \frac{\ln x}{ax}$ 有相同的最小值。

(1) 求 a 的值；

(2) 设集合 $A = \{x | f(x) = b\}$ ， $B = \{x | g(x) = b\}$ (b 为常数)。

① 证明：存在实数 b ，使得集合 $A \cup B$ 中有且仅有 3 个元素；

② 设 $A \cup B = \{x_1, x_2, x_3\}$ ， $x_1 < x_2 < x_3$ ，求证： $x_1 + x_3 > 2x_2$ 。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

