柳州高中／南宁二中高三(5月)联考

理科数学参考答案

一、(60分)

1. B(当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$0\leqslant\cos x\leqslant 1$，则 $B=\{y\mid y=3-2\cos x,x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\}=[1,3]$，

又因为 $A=\{y\mid y=e^x,x\in\mathbf{R}\}=(0,+\infty)$，因此，$A\cap B=[1,3]$.

故应选 B.)

2. D(由已知 $i(i+z)=1$，得 $z=\frac{1}{i}-i=-2i$，

所以 z 对应的点的坐标是 $(0,-2)$.

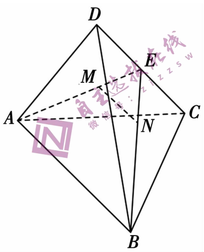
故应选 D.)

3. B(因为加上的数为最大，故极差一定变大，A 错误；众数不变，D 错误；

若100个数据从小到大排列依次为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{100}$，故中位数为 $\frac{x_{50}+x_{51}}{2}$，$x_1,x_2\cdots x_{101}$ 的中位数为 x_{51}. 故当 $x_{50}=x_{51}$ 时中位数不变，而平均数会变大.

故应选 B.)

4. B(如图，取 CD 中点为 E，连结 AE、BE.



由已知以及重心定理可得，$\frac{AM}{ME}=\frac{2}{1}$，$\frac{BN}{NE}=\frac{2}{1}$，则 $\frac{EM}{EA}=\frac{1}{3}$，$\frac{EN}{EB}=\frac{1}{3}$.

所以 $\frac{EM}{EA}=\frac{EN}{EB}=\frac{1}{3}$，所以 $MN\ /\!/\ AB$.

而 CD 不平行 AB，故 A 错误；

因为 $MN\not\subset$ 平面 ABD，$AB\subset$ 平面 ABD，所以 $MN\ /\!/$ 平面 ABD，故 B 正确；

因为 $M\in$ 平面 ACD，$N\notin$ 平面 ACD，所以 MN 与平面 ACD 不平行，故 C 错误；

因为 $N\in$ 平面 BCD，$M\notin$ 平面 BCD，所以 MN 与平面 BCD 不平行，故 D 错误.

故应选 B.)

5. C(三位数各位数的和为8可能的组合有116，125，134，224，233，017，026，035，044，008，

其中三个数不同的且都不为0的有125和134，可排出 $A_3^3=6$ 个"叔同数"，其中偶数各为2个，没有0的3个数中有2个数相同的有116，224，233，则排出 $A_3^1=3$ 个"叔同数"，其中偶数分别有1个，3个，1个，有1个0其余2个数为不同的非零数字为017，026，035，可排出 $A_2^1A_2^2=4$ 个"叔同数"，偶数分别有2个，4个，2个，044，有2个偶数，008只能排出800一个"叔同数"，且为偶数，

所以它们排出的"叔同数"的偶数个数共有20个，

故应选 C.)

6. D($f(-x)=\frac{(-x)\sin(-x)}{2}=\frac{x\sin x}{2}=f(x)$，可得 $f(x)$ 为偶函数，排除 C 项，由 $\sin x$ 可正可负值，排除 B 项.

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(\frac{\pi}{2})>0$. 排除 A 项.

故应选 D.)

7. A(由题意得：$S_{n+1}=3^n+t$，$\therefore a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=3^n-3^{n-1}=2\times 3^{n-1}$

$\therefore a_n=2\times 3^{n-2}$，而 $a_1=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，$S_1=1+t$

$\therefore 1+t=\frac{2}{3}$. $\therefore t=-\frac{1}{3}$.

故应选 A.)

8. C(从某地市场上购买一个灯泡，设买到的灯泡是甲厂产品为事件 A，买到的灯泡是乙厂产品为事件 B，

则 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.2$

记事件 C：从该地市场上买到一个合格灯泡，则 $P(C\mid A)=0.75$，$P(C\mid B)=0.8$，

所以，$P(C)=P(AC)+P(BC)=P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)=0.8\times 0.75+0.2\times 0.8=0.76$

故应选 C.)

9. B(由已知 $f'(x)=\frac{2}{x}+2ax-3,x>0$,

$\therefore f'(1)=2+2a-3=0$,得 $a=\frac{1}{2}$,

此时 $f'(x)=\frac{2}{x}+x-3=\frac{x^2-3x+2}{x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x},x>0$,

令 $f'(x)>0$,得 $0<x<1$ 或 $x>2$,

令 $f'(x)<0$,得 $1<x<2$,

故 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值,符合题意.

则 a 的值为 $\frac{1}{2}$.

故应选 B.)

10. B($\frac{1}{10001}+\frac{1}{10002}+\cdots+\frac{1}{30000}=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{30000})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10000})=\ln30000+\gamma-(\ln10000+\gamma)=\ln30000-\ln10000=\ln\frac{30000}{10000}=\ln3$.

故应选 B.)

11. C(切线斜率 $k_l=-\frac{1}{a^2m}$,所以 PM 的斜率 $k_{PM}=a^2m$,直线 PM 的方程为 $y-m=a^2m(x-1)$,

令 $y=0$,得 $x=1-\frac{1}{a^2}$,所以 $1-\frac{1}{a^2}=\frac{c}{2}$,

又 $a^2=c^2+1$,联立可得 $c=1,e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故应选 C.)

12. C(因为 $y=b_0+b_1x^2-b_2x^3$ 的定义域为 $\{x\mid x>0\}$,不关于原点对称,故 A 不正确;

模型函数的图象也不可能是中心对称图象,故 B 不正确;

$y'=2b_1x-3b_2x^2=x(2b_1-3b_2x)=0$,则 $x=0$ 或 $x=\frac{2b_1}{3b_2}$,

若 b_1,b_2,均是正数,则 $x=\frac{2b_1}{3b_2}>0$,

令 $y'<0$,则 $x>\frac{2b_1}{3b_2}$;令 $y'>0$,则 $0<x<\frac{2b_1}{3b_2}$,

所以函数在 $(0,\frac{2b_1}{3b_2})$ 上单调递增,在 $(\frac{2b_1}{3b_2},+\infty)$ 上单调递减,

所以当 $x=\frac{2b_1}{3b_2}$ 时,y 有最大值,故 C 正确;

$y'=2b_1x-3b_2x^2=x(2b_1-3b_2x)=0$,若 $b_1>0,b_2<0$,则 $y'>0$,

函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $y>b_0$,苹果树负载量的最小值不是 b_0,故 D 不正确.

故应选 C.)

二、(20 分)

13. $\sqrt{7}$($\left|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}-\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right|=1$,即 $1+1-2\times\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=1$,解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{3^2+2^2-2\times3}=\sqrt{7}$.

故答案为:$\sqrt{7}$.)

14. $\frac{5}{16}$(二项式 $(\frac{1}{x}+\frac{x}{2})^5$ 的展开式为 $T_{r+1}=C_5^r(\frac{1}{x})^{5-r}(\frac{x}{2})^r=C_5^r\cdot(\frac{1}{2})^r\cdot x^{2r-5}$,

令 $2r-5=3$,解得 $r=4$,

所以展开中 x^3 的系数为 $C_5^4\cdot(\frac{1}{2})^4=\frac{5}{16}$,

故答案为:$\frac{5}{16}$.)

15. $2:1$(设长方体体积为 V. 由题可知:$V_1=\frac{V}{3},V_2=\frac{V}{6}$,所以 $V_1:V_2=2:1$.)

16. $\pm\frac{\sqrt{39}}{6}$(由题知 $F(2,0)$,

由题意设直线方程为 $y=k(x-2)$,令 $x=0$,得 $y=-2k$,则 $M(0,-2k)$,

设 $Q(x,y)$,则 $\overrightarrow{MQ}=(x,y+2k)$,$\overrightarrow{QF}=(2-x,-y)$,

因为 $\overrightarrow{MQ}+2\overrightarrow{QF}=\mathbf{0}$,

所以 $(x,y+2k)+2(2-x,-y)=0$,则 $\begin{cases}4-x=0\\-y+2k=0\end{cases}$,

解得 $\begin{cases}x=4\\y=2k\end{cases}$,因为点 Q 在双曲线上,

所以$\frac{16}{3}-4k^2=1$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{39}}{6}$，

所以直线 l 的斜率为 $k=\pm\frac{\sqrt{39}}{6}$.）

三、（70 分）

17.（1）因为 $2\sin B=\sin A+\cos A\cdot\tan C$，所以 $2\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，…… 2 分

即 $2\sin B\cos C=\sin(A+C)$，又 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+C)=\sin B\neq 0$，………… 4 分

所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，又 $0<C<\pi$，即 $C=\frac{\pi}{3}$；

……………………………………………… 6 分

（2）由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-ab=16+a^2-4a$，① ……………………………………… 8 分

由等面积公式得$\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}ab\sin C$.

…………………………………………………… 9 分

即$\frac{1}{2}(a+b+c)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times 4a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………… 10 分

整理得 $3a=4+c$，②

联立 ①②，解得 $a=\frac{5}{2}$，$c=\frac{7}{2}$，…… 11 分

所以 $a-c=-1$. ……………………… 12 分

18.（1）由柱状图并以频率代替概率可得，一台机器在三年内需更换的易损零件数为 8，9，10 的概率分别为 0.3，0.4，0.3，…………… 1 分

从而 $P(X=16)=0.3\times0.3=0.09$，

$P(X=17)=2\times0.3\times0.4=0.24$，…

……………………………………………… 3 分

$P(X=18)=0.4\times0.4+2\times0.3\times0.3=0.34$，

$P(X=19)=2\times0.3\times0.4=0.24$，

$P(X=20)=0.3\times0.3=0.09$，… 5 分

所以 X 的分布列为

X	16	17	18	19	20
P	0.09	0.24	0.34	0.24	0.09

…………………………………………………… 6 分

（2）记 Y 表示 2 台机器在购买易损零件上所需的费用（单位：元），

当 $n=17$ 时，$E(Y)=17\times200\times0.33+(17\times200+500)\times0.34+(17\times200+2\times500)\times0.24+(17\times200+3\times500)\times0.09=3945$

……………………………………………… 8 分

当 $n=18$ 时，

$E(Y)=18\times200\times0.67+(18\times200+500)\times0.24+(18\times200+2\times500)\times0.09=3810$.

因为 $3945>3810$，…………………… 10 分

可知当 $n=18$ 时所需费用的期望值小于 $n=17$ 时所需费用的期望值，

故应选 $n=18$ ……………………… 12 分

19.（1）因为点 P 为圆锥的顶点，所以 $PO\perp$ 平面 ABC. ∵ $BC\perp AC$，又 M,O 分别为 AC、AB 中点. ……………………………………… 1 分

∴ $OM\perp AC$. …………………………… 2 分

由 $PO\perp$ 平面 ABC，得 $PO\perp AC$. ………

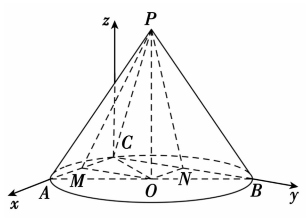
……………………………………………… 4 分

又 $PO\cap OM=O$，故 $AC\perp$ 平面 PMO，

……………………………………………… 5 分

（2）∵ $AC^2+BC^2=AB^2$，∴ $BC=2\sqrt{3}$，$AC=2$. 而 $PA=2\sqrt{3}$，∴ $PO=\sqrt{PA^2-OA^2}=2\sqrt{2}$.

在圆 O 中，$CA\perp CB$，以点 C 为坐标原点，CA 所在直线为 x 轴，CB 所在直线为 y 轴，过 C 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $C-xyz$. ……………………………… 6 分



则 $C(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2\sqrt{3},0)$.

又因为 $PO\perp$ 平面 ABC，所以 $OP\parallel z$ 轴，从而 $P(1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$.

则$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CB}=(0,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CP}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$. ……………………………… 7 分

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x=0\\x+\sqrt{3}y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

不妨取 $y=2\sqrt{2}$，则 $x=0$，$z=-\sqrt{3}$，此时 $\boldsymbol{m}=(0,2\sqrt{2},-\sqrt{3})$. …………………………… 9 分

平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，…………………………………………………… 10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}\times 1}$

$=\dfrac{\sqrt{33}}{11}$. ………………………………………… 11 分

又二面角 $P-AC-B$ 为锐二面角，

所以二面角 $P-AC-B$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

……………………………………………………… 12 分

20. (1) 由题及抛物线的定义知点 P 到抛物线准线的距离为 5，抛物线的准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$， ………………………………………… 1 分

$\therefore 4+\dfrac{p}{2}=5$，解得 $p=2$，故抛物线的方程为 $y^2=4x$；………………………………………… 4 分

(2) 依题意 $O(0,0)$，设 $OA:y=kx$，

由 $\begin{cases} y=kx \\ y^2=4x \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=\dfrac{4}{k^2} \\ y=\dfrac{4}{k} \end{cases}$， ………… 5 分

所以 $A(\dfrac{4}{k^2},\dfrac{4}{k})$，

设 $AB:y-\dfrac{4}{k}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{4}{k^2})$， …… 6 分

由 $\begin{cases} y-\dfrac{4}{k}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{4}{k^2}) \\ y^2=4x \end{cases}$，得 $y^2+4ky-16-\dfrac{16}{k^2}=0$， ………………………………………… 7 分

则 $y_A+y_B=-4k$，所以 $y_B=-4k-\dfrac{4}{k}$，$x_B=\dfrac{{y_B}^2}{4}=\dfrac{(-4k-\frac{4}{k})^2}{4}=4\,(k+\dfrac{1}{k})^2$，

即 $B(-4k-\dfrac{4}{k},4\,(k+\dfrac{1}{k})^2)$， ……… 9 分

所以 $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{{x_B}^2+{y_B}^2}$

$=\sqrt{(-4k-\dfrac{4}{k})^2+[4\,(k+\dfrac{1}{k})^2]^2}$

$=4\sqrt{(k+\dfrac{1}{k})^4+(k+\dfrac{1}{k})^2}$， ………… 10 分

设 $t=(k+\dfrac{1}{k})^2\geqslant 4$，当且仅当 $k=\pm1$ 时等号成立，

则 $|\overrightarrow{OB}|=4\sqrt{t^2+t}=4\sqrt{(t+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}}$，

………………………………………………… 11 分

所以当 $t=4$ 时，$|\overrightarrow{OB}|$ 取最小值为 $8\sqrt{5}$.

………………………………………………… 12 分

21. (1) 设曲线 Γ 上一点为 $(t,f(t))$，且 $t>0$，$y'=\cos t$， ………………………………… 1 分

则曲线 $y=\sin x$ 在点 $(t,\sin t)$ 处的切线方程为 $y-\sin t=\cos t(x-t)$.

则该切线过点 $(0,\pi)$ 当且仅当 $\pi-\sin t=-t\cos t(*)$. ………………………………… 2 分

设 $G(t)=\sin t-t\cos t-\pi$，则当 $0<t<\pi$ 时，$G'(t)=t\sin t>0$，故 $y=G(t)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递增. ………………………………… 3 分

因此当 $0<t<m<\pi$ 时，$G(t)<G(\pi)=0$，$(*)$ 恒不成立，即点 $(0,\pi)$ 是 $y=g(x)$ 的一个 0 度点. ………………………………………… 4 分

(2) $y'=3x^2-1$，

对任意 $t\in\mathbf{R}$，曲线 $y=x^3-x$ 在点 (t,t^3-t) 处的切线方程为 $y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$. ………………………………………………… 5 分

故点 (a,b) 为函数 $y=x^3-x$ 的一个 2 度点当且仅当关于 t 的方程 $b-(t^3-t)=(3t^2-1)(a-t)$ 恰有两个不同的实数解.

设 $h(t)=2t^3-3at^2+(a+b)$. 则点 (a,b) 为函数 $y=x^3-x$ 的一个 2 度点当且仅当 $y=h(t)$ 两个不同的零点. ………………………… 6 分

若 $a=0$，则 $h(t)=2t^3+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，只有一个实数解，不合要求. ………………… 7 分

若 $a>0$，因为 $h'(t)=6t^2-6at=0$，解得 $t=0$ 或 $t=a$.

由 $t<0$ 或 $t>a$ 时，$h'(t)>0$ 得 $y=h(t)$ 单调递增；而当 $0<t<a$ 时，$h'(t)<0$，得 $y=h(t)$ 单调递减.

故 $y=h(t)$ 在 $t=0$ 时取得极大值 $h(0)=a+b$，在 $t=a$ 时取得极小值 $h(a)=b+a-a^3$.

………………………………………………… 8 分

又因为 $h(-\sqrt[3]{\dfrac{a+b}{2}})=-3a\sqrt[3]{(\dfrac{a+b}{2})^2}<0$，$h(3a+\sqrt[3]{|b|})\geqslant a>0$，

所以当 $h(0)>0>h(a)$ 时，由零点存在定

理，$y=h(t)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,a)$、$(a,+\infty)$ 上各有一个零点，不合要求；………………………… 9 分

当 $0>h(0)>h(a)$ 时，$y=h(t)$ 仅 $(a,+\infty)$ 上有一个零点，不合要求；

当 $h(0)>h(a)>0$ 时，$y=h(t)$ 仅 $(-\infty,0)$ 上有一个零点，也不合要求.

故 $y=h(t)$ 两个不同的零点当且仅当 $h(0)=0$ 或 $h(a)=0$. ………………………… 10 分

若 $a<0$，同理可得 $y=h(t)$ 两个不同的零点当且仅当 $h(0)=0$ 或 $h(a)=0$. …… 11 分

综上，$y=x^3-x$ 的全体 2 度点构成的集合为 $\{(a,b)\mid b=-a$ 或 $b=a^3-a,a\neq 0\}$. ……………………………………………… 12 分

22. (1) 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=m+\dfrac{1}{2m}\\ y=m-\dfrac{1}{2m}\end{cases}$ (m 为参数)，

由 $x^2=m^2+1+\dfrac{1}{4m^2}$，$y^2=m^2-1+\dfrac{1}{4m^2}$，

故 $x^2-y^2=2$，即 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$， ………… 2 分

又直线 $l:\rho\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})=1$，所以 $\rho(\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{3})=1$，

即 $\rho(\dfrac{1}{2}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)=1$，即 $\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=1$， ………………………… 3 分

所以 $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=1$，即 $x-\sqrt{3}y-2=0$，

所以曲线 $C:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$，直线 $l:x-\sqrt{3}y-2=0$. ………………………………………… 5 分

(2) 解：由 $k=\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，

故直线 l 的标准参数方程为 $\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，………………………………… 7 分

将其代入曲线 C 中，得 $\dfrac{1}{2}t^2+2\sqrt{3}t+2=0$，

所以 $\begin{cases}t_1+t_2=-4\sqrt{3}\\ t_1t_2=4\end{cases}$， ………………… 8 分

故 $\dfrac{1}{|MP|}+\dfrac{1}{|MQ|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\sqrt{3}$. ……………………… 10 分

23. (1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=|x+1|-2|x-1|$.

$f(x)=|x+1|-2|x-1|=\begin{cases}x-3,x<-1,\\ 3x-1,-1\leqslant x\leqslant 1,\\ -x+3,x>1\end{cases}$ ………………… 2 分

所以 $f(x)>-1$ 等价于 $\begin{cases}x<-1\\ x-3>-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ 3x-1>-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1\\ -x+3>-1\end{cases}$，………… 3 分

解得 $0<x<4$，所以不等式 $f(x)>-1$ 的解集为 $(0,4)$. ………………………………… 5 分

(2) 因为 $x\in[-3,-2]$，所以 $f(x)>0$ 等价于 $-x-1-2|x+a|>0$，

所以 $|2x+2a|<-x-1$，即 $x+1<2x+2a<-x-1$，………………………………… 7 分

所以 $-x+1<2a<-3x-1$ 在 $x\in[-3,-2]$ 时恒成立. ………………………………… 8 分

所以 $4<2a<5$，解得 $2<a<\dfrac{5}{2}$，即实数 a 的取值范围是 $(2,\dfrac{5}{2})$. ……………………… 10 分